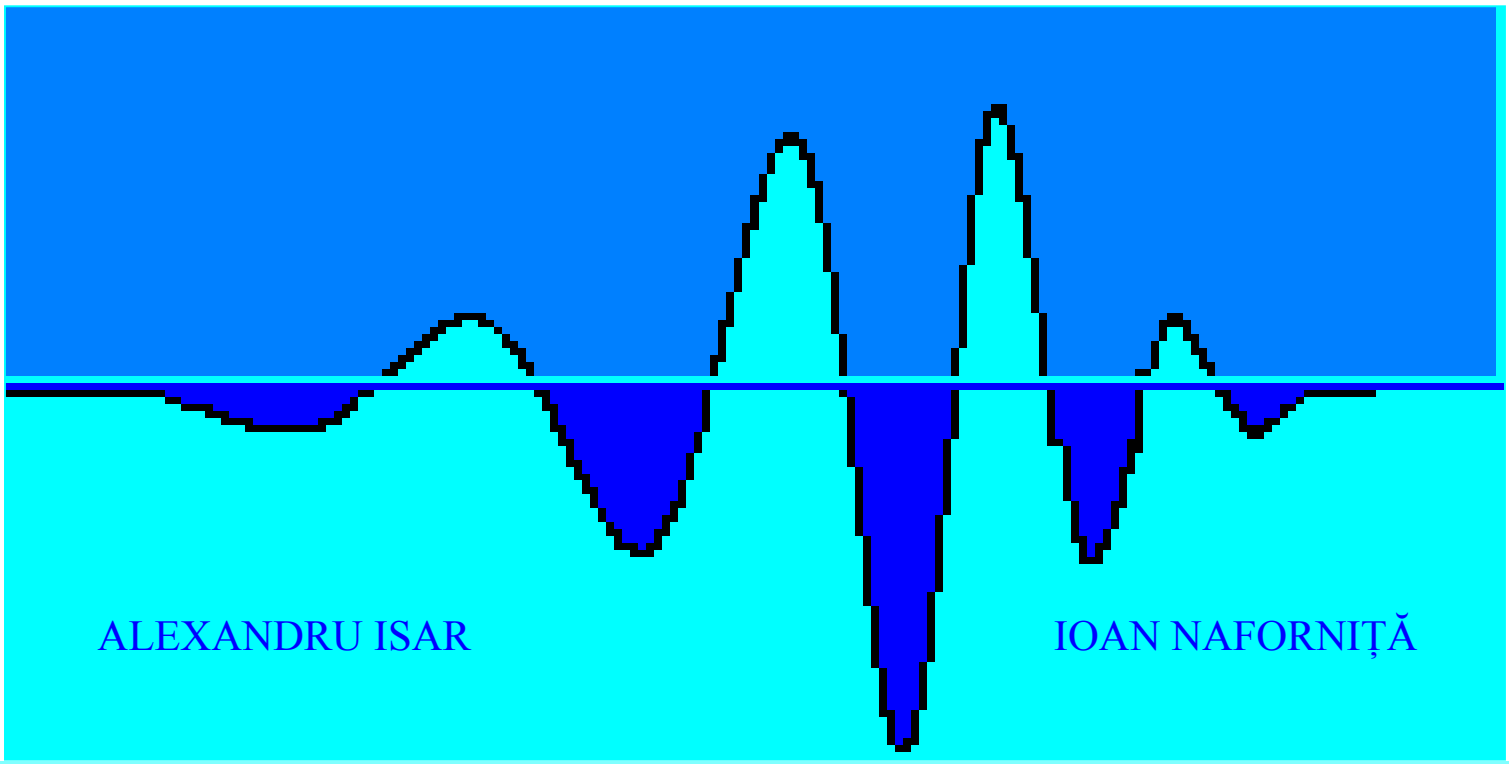
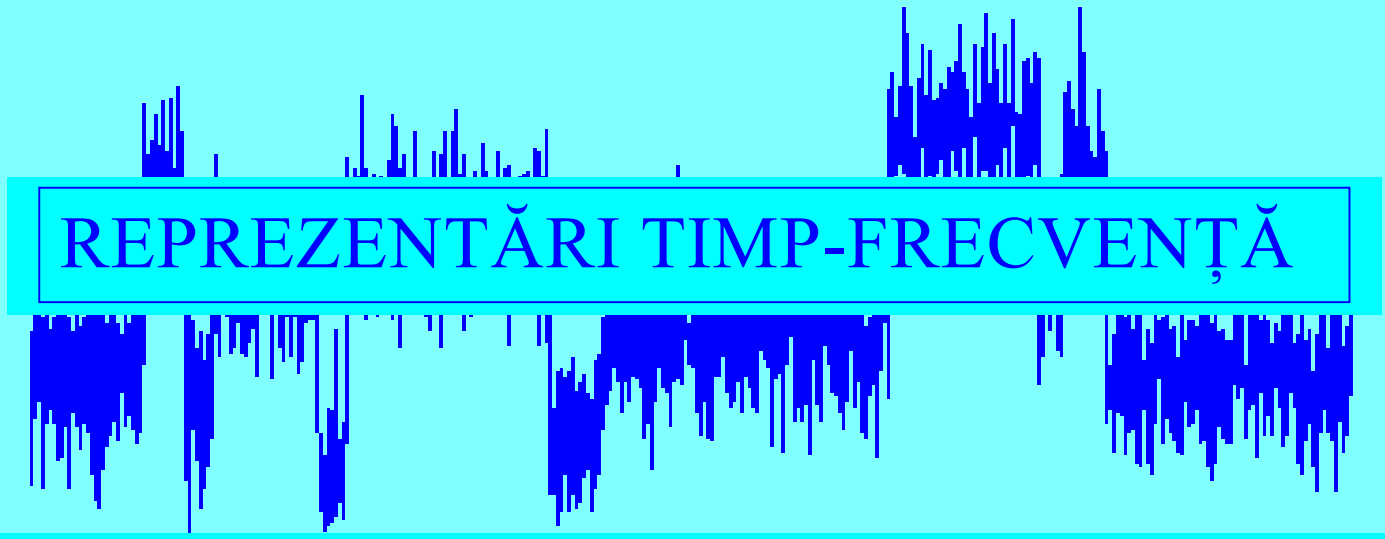
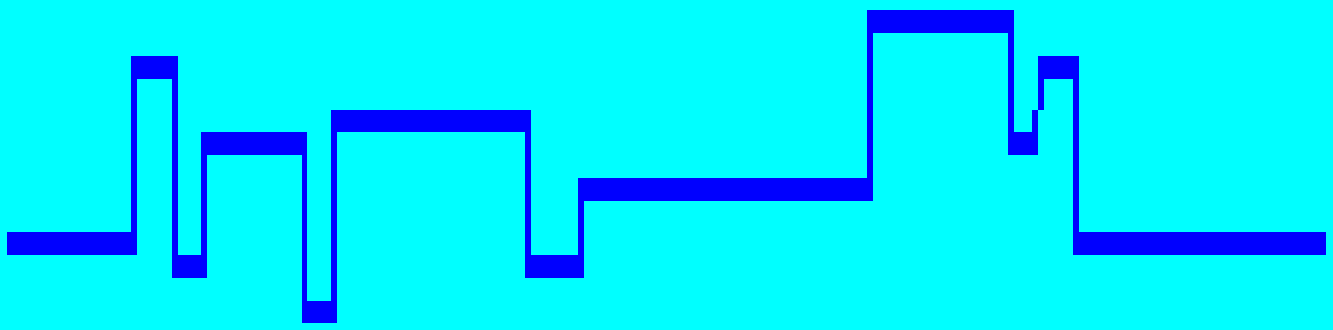


ALEXANDRU ISAR

IOAN NAFORNIȚĂ



REPREZENTĂRI TIMP-FRECVENȚĂ



Editura "Politehnica"

Prefaţă

Autorii lucrării sunt bine cunoscuţi ca specialişti în domeniul prelucrării semnalelor, atât analogice cât şi numerice, având preocupări de duratã referitoare la noile reprezentări timp-frecvenţă de tip "wavelet". De fapt, aceste reprezentări au constituit şi obiectul unor seminarii la care autorii au prezentat rezultate personale, unele dintre acestea fiind comunicate la manifestări ştiinţifice internaţionale. O carte asemănătoare nu a mai apărut la noi în ţarã şi chiar în lume sunt doar câteva (3-4). Faţă de acestea se remarcă prin nivel, prin viziune unitarã şi prin rigurozitate. Se poate afirma cã lucrarea de faţă este o monografie întocmitã pe baza unei foarte vaste bibliografii, formatã cu precădere din articole şi cã ea reprezintã o sintezã originalã de valoare. Lucrarea este rezultatul unui efort îndelungat şi susţinut. Cartea se adreseazã unui cerc de cititori cu o pregătire prealabilã temeinicã în teoria semnalelor, care au o bunã bazã matematicã. Lucrarea are nouã capitole şi conţine peste patru sute de pagini. Bibliografia citatã numărã o sutã patruzeci şi opt de titluri, printre care şi articole ale autorilor. O analizã mai atentã a conţinutului lucrării scoate în evidenţă faptul cã problemele legate de transformări de tip "wavelet" ocupă majoritatea volumului şi cã de fapt cartea este destinatã, în fond acestora, încadrându-le însă
într-un context mai general, firesc de altfel, al transformărilor timp-frecvenţă. Consider cã aceastã opţiune a autorilor este corectã, cel puţin din douã motive. Primul îl constituie noutatea, faptul cã transformarea "wavelet" este mai recentã şi sunt puţine cărţi care sã o trateze în toatã complexitatea sa. Cel de al doilea motiv este importanţa aplicaţiilor. Dacã, probabil, transformarea de tip "wavelet" a apărut şi s-a aplicat în explorări seismice, pentru detectarea zăcămintelor petrolifere, acum cercul aplicaţiilor acestei transformări se lărgeşte continuu. Sigur, se putea scrie o carte separatã despre aceste transformări, dar ideea autorilor de a trata unitar reprezentările timp-frecvenţă mi se pare fericitã. Mereu avem nevoie de sinteze şi generalizări. Fărã ele acumulările ştiinţei se pierd.

În capitolul introductiv autorii cautã sã explice cât mai simplu sensul noţiunii de reprezentare timp-frecvenţă a unui semnal. Cititorul este obişnuit cu reprezentările semnalelor, separat în domeniul timp şi separat în domeniul frecvenţă (transformările Fourier). În cazul semnalelor nestaţionare spectrul se modificã în timp. De aici apare necesitatea reprezentării timp-frecvenţă. Un prim demers spre generalizare este fãcut de autori în chiar primul capitol, unde se prezintã proprietãţile dorite pentru aceste reprezentări, indiferent de tipul lor. În capitolele urmãtoare se va reveni frecvent asupra acestor proprietãţi, atunci când se vor prezenta diferitele transformări uzuale.

Capitolul al doilea se referã la reprezentarea timp-frecvenţã de tipul transformare Fourier scurtã, folosind la început o fereastrã rectangularã care se deplasează de-a lungul axei timpului, permiţând în acest fel explorarea întregului semnal şi determinarea spectrului corespunzător poziţiei ferestrei. Deşi atrãgãtoare prin simplitatea sa, aceastã transformare are multe inconveniente, care au determinat apariţia altor tipuri de ferestre care au în vedere nu atât trunchierea semnalului cât modificarea sa, în sensul accentuării părţii centrale şi reducerii părţilor laterale.
Se obţin astfel proprietãţi mai avantajoase. Proprietãţile fiecãrei ferestre sunt bine evidenţiate în lucrare.

În capitolul trei se continuã prezentarea transformãrilor introducându-se un nou tip de fereastrã, dependentã de semnal şi care este chiar semnalul de analizat.
Într-un anumit sens este vorba despre o transformare adaptivã, care prezintã numeroase avantaje. Se subliniazã legãtura acesteia cu transformarea Fourier scurtã.

Şi transformarea Wigner-Ville, care formează obiectul capitolului patru poate fi redusã la transformãri prezentate anterior. Se evidenţiazã continuitatea logicã a diferitelor capitole, fapt care va fi exploatat în capitolul şase în care autorii expun o generalizare a transformãrilor prezentate anterior renunţând şi la condiţia ca semnalele de prelucrat sã fie de energie finitã.

Capitolele cinci, şapte şi opt se referã la reprezentãrile timp-frecvenţã de tip “wavelet”. Ele reprezintã partea cea mai dezvoltatã din carte, de fapt motivaţia ei. Sunt prezentate bazele teoretice ale acestor transformãri ortogonale, probleme legate de discretizarea lor, precum şi algoritmi şi programe de calcul. Consider cã acestea sunt cele mai valoroase capitole ale lucrării, umplând un vid din literatura în limba românã.

Capitolul nouã, dedicat aplicaţiilor, este foarte scurt fãcând numeroase trimiteri la bibliografie. Chiar şi aşa, prin succinta prezentare a domeniilor în care se aplicã: radar, medicinã, metrologie, explorări seismice, telecomunicaţii, prelucrarea imaginilor, acest capitol reprezintã un argument convingător în aprecierea valorii pe care o au reprezentãrile timp-frecvenţã şi deci constituie un imbold pentru studierea şi aprofundarea lor.

În concluzie consider cartea “Reprezentări timp frecvenţã” de un înalt nivel ştiinţific, stimulativ pentru o gândire atât analiticã cât şi sinteticã.

Timişoara, 20. 03. 1998 Profesor dr. ing. Eugen Pop

NOTAȚII UTILIZATE

$r_{ss}(t)$	autocorelația semnalului s(t)
CG_n	codul Gray al numărului n
$(\,)^*$	conjugare complexă
$*$	convoluție
E_x	energia semnalului x
$\hat{V}$	estimata lui V
Q	factorul de calitate al unui filtru
s	factorul de scară al unui semnal, scara unui semnal
φ	funcție de scară
$_0\varphi$	funcție de scară ortogonală
ψ	funcție "wavelet"
$\sigma(t)$	funcția treaptă unitate
$p_T(t)$	impuls dreptunghiular de durată 2T
$\overline{A}$	închiderea mulțimii A
$\|\ \|$	normă
$K(\,,\,)$	nucleu
$\uparrow$	operator de dublare a scării
$\tilde{F}$	operatorul dual operatorului F
H	operatorul Hilbert
$\downarrow$	operator de înjumătățire a scării
E	operator de mediere statistică
R	operatorul rest
$\times$	produs cartezian
$\langle , \rangle$	produs scalar
$\otimes$	produs tensorial
$\omega_i(t)$	pulsația instantanee
r	regularitatea unui semnal, rezoluția unui semnal
F_d^r	restricția transformării Fourier la perioada principală
$x_a(t)$	semnalul analitic asociat semnalului x(t)
$x^v(t)$	semnalul obținut prin reflectarea semnalului x(t)
B_π^2	spațiul semnalelor de energie finită şi bandă limitată
$supp\{x(t)\}$	suportul semnalului x(t)
F	transformarea Fourier a semnalelor în timp continuu
F_d	transformarea Fourier în timp discret
$X(\omega)$	transformata Fourier a semnalului x(t)
$X(\Omega)$	transformata Fourier în timp discret a semnalului x[n]
$X(z)$	transformata z a semnalului x[n]

CUPRINS

1. INTRODUCERE 17
1.1. Conceptul de reprezentare timp frecvență 17
1.1.1. Localizarea semnalelor în planul timp-frecvență 21
1.2. Proprietăți cerute unei reprezentări timp-frecvență 22

2. REPREZENTAREA TIMP-FRECVENTA DE TIPUL TRANSFORMARE FOURIER SCURTA 28
2.1. Exprimarea reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă ca şi produs de convoluție 28
2.2. Proprietățile reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă 32
2.3. Exemplu 40

3. REPREZENTAREA TIMP-FRECVENTA DE TIPUL "FUNCȚIE DE INCERTITUDINE" 45
3.1. Exprimări alternative ale funcției de incertitudine 45
3.2. Proprietățile reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine 52
3.3. Exemplu 60

4. REPREZENTAREA TIMP-FRECVENȚĂ DE TIPUL WIGNER-VILLE 64
4.1. Exprimări alternative ale reprezentării de tip Wigner-Ville 64
4.2. Proprietățile reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville 66
4.3. Exemplu 78

5. REPREZENTAREA TIMP-FRECVENȚĂ DE TIPUL "WAVELET" 80
5.1. Exprimări alternative ale reprezentării de tip "wavelet" 80
5.2. Proprietățile reprezentării timp-frecvență de tipul "wavelet" 82
5.3. Exemplu 84

6. GENERALIZĂRI 86

6.2. Clasa reprezentărilor biliniare. Clasa lui Cohen 91
6.2.1. Cazul reprezentărilor timp-frecvență 92
6.2.2. Cazul reprezentărilor timp-factor de scară 95
6.3. Legătura dintre teoria reprezentărilor bidimensionale şi teoria semnalelor aleatoare 99
6.3.1. Distribuții de putere 102

7. DISCRETIZAREA REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ 106
7.1. Discretizarea reprezentărilor liniare 106
7.1.1. Discretizarea reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă 109
7.1.2. Discretizarea reprezentării de tip "wavelet" 123
7.1.2.1. Baze ortonormale de funcții "wavelet" 134
7.1.2.2. Conceptul de analiză multirezoluție 144
7.1.2.3. Conceptul de descompunere orotogonală 158
7.1.2.4. Caracterizarea analizelor multirezoluție cu ajutorul polinoamelor 176
7.1.2.5. Algoritmul lui Mallat 192
7.1.2.6. Derivarea şi integrarea în analizele multirezoluție 198
7.1.2.7. Variațiuni pe tema bazelor ortonormale de funcții "wavelet" 200
7.1.2.8. Baze biortogonale de funcții "wavelet" 228
7.1.2.9. Generalizarea conceptului de analiză multirezoluție 255
7.1.2.10. Pachete de funcții "wavelet" 272
7.2. Analiza semnalelor nestaționare folosind un dicționar timp-frecvență 294
7.3. Discretizarea reprezentărilor biliniare 298
7.4. Atomi timp-frecvență şi reprezentări biliniare 302

8. ALGORITMI ŞI PROGRAME DE CALCUL A REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ 308
8.1. Utilizarea algoritmului FFT la calculul reprezentărilor timp-frecvență 308

8.2. Calculul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare "wavelet" continuă folosind algoritmul lui Mallat 310
8.2.1. Inițializarea algoritmului lui Mallat 310
8.2.2. Implementarea algoritmului lui Mallat 315
8.2.3. Algoritmul lui Mallat în cazul semnalelor bidimensionale 320
8.3. Algoritmi pentru analiza timp-frecvență a semnalelor nestaționare folosind pachete de funcții "wavelet" 324
8.4. Programe pentru analiza timp-frecvență 326
8.4.1. Programul JTFA 326
8.4.2. Pachetul de programe Mega Wave 2 336
8.4.3. Despre WaveLab 338

9. APLICAȚII 350
9.1. Aplicațiile reprezentărilor timp-frecvență în Radar 350
9.2. Aplicațiile reprezentărilor timp-frecvență în explorarea seismică 352
9.3. Aplicațiile reprezentărilor timp-frecvență la detecția defectelor mecanice 352
9.4. Aplicațiile reprezentărilor timp-frecvență în medicină 353
9.5. Aplicațiile reprezentărilor timp-frecvență în metrologie 356
9.5.1. Măsurarea frecvenței instantanee 356
9.5.2. Măsurarea benzii instantanee 364
9.5.3. Compresia datelor în aparatura de măsurare 366
9.6. Aplicații în telecomunicații 379
9.6.1. Aplicații la prelucrarea semnalului vocal 379
9.6.2.Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot folosind funcțiile "wavelet" 382
9.6.3. Aplicații la prelucrarea imaginilor 388
9.6.4. Alte aplicații în telecomunicații 390
Bibliografie 391
Index 400

CONTENTS

1. Introduction 17
1.1. The Time Frequency representation Concept 17
1.1. Time Frequency Localisation 21
1.2. Properties Requested for a Time-Frequency Representation 22

2. The Short-Time Fourier Transform 28
2.1. The Short Time Fourier Transform Like a Convolution 28
2.2. Properties of the Short Time Fourier Transform 32
2.3. An Example 40

3. The Ambiguity Function 45
3.1. Alternative Formula for the Ambiguity Function 45
3.2. Properties 52
3.3. An Example 60

4. The Wigner-Ville Time Frequency Representation 64
4.1. Alternative Formula for the Wigner-Ville Representation 64
4.2. Properties 66
4.3. An Example 78

5. The Continuous Wavelet Transform 80
5.1. Alternative Formula for the Continuous Wavelet Transform 80
5.2. Properties of the Continuous Wavelet Transform 82
5.3. An Example 84

6. Generalisations 86
6.1. Linear Representations Case 86
6.2.The Class of Quadratic Representations. The Cohen's Class 91
6.2.1. The Time-Frequency Representations Case 92
6.2.2. The Time-Scale Factor Representations Case 95
6.3. The Relation Between the Quadratic Representations Theory and the Random Signals Theory 99

6.3.1. Power Distributions 102

7. The Discretization of Time-Frequency Representations 106
7.1. The Discretization of the Linear Representations 106
7.1.1. The Discretization of the Short Time Fourier Transform 109
7.1.2. The Discretization of the Continuous Wavelet Transform 123
7.1.2.1. Orthonormal Bases of Wavelets 134
7.1.2.2. The Multiresolution Analysis Concept 144
7.1.2.3. The Orthogonal Decomposition Concept 158
7.1.2.4. The Description of the Multiresolution Analyses with Polynomial Functions 176
7.1.2.5. The Mallat's Algorithm 192
7.1.2.6. Differentiating and Integrating in Multiresolution Analyses 198
7.1.2.7. Orthonormal Bases of Wavelets. Variation on the theme 200
7.1.2.8. Biorthogonal Bases of Wavelets 228
7.1.2.9. The Generalisation of the Multiresolution Concept 255
7.1.2.10. Wavelet Packets 272
7.2. The Analysis of Non-Stationary Signals using a Time-Frequency Dictionary 294
7.3. The Discretization of Quadratic Representations 298
7.4. Time-Frequency Atoms and Quadratic Representations 302

8. Algorithms and Programs to Compute the Time Frequency Representations 308
8.1. Using the FFT Algorithm to Compute the Time-Frequency Representations 308
8.2. Computing the Continuous Wavelet Transform using the Mallat's Algorithm 310
8.2.1. The Mallat's Algorithm Initialisation 310
8.2.2. The Mallat's Algorithm Implementation 315
8.2.3. The two-dimensional Case 320
8.3. Algorithms using Wavelet Packets 324
8.4. Soft for Time-Frequency Analysis 326
8.4.1. About JTFA 326

8.4.2. About MegaWave 336
8.4.3. About WaveLab 338

9. Application 350
9.1. Time Frequency Analysis in Radar 350
9.2. Application of the Time Frequency Representations to Seismic Data Processing 352
9.3. Time Frequency Analysis in Machine Fault Detection 352
9.4. Application of the Time Frequency Representations in Medicine 353
9.5. Time Frequency Representations in Metrology 356
9.5.1. The Instantaneous Frequency Measurement 356
9.5.2. The Instantaneous Bandwidth Measurement 364
9.5.3. Data Compression 366
9.6. Application in Telecommunications 379
9.6.1. Application to Speech Processing 379
9.6.2. The Enhancement of the Signal to Noise Ratio using Wavelets 382
9.6.3. Application to Image Processing 388
9.6.4. Other Application in Telecommunications 390
References 391
Index 400

TABLE DE MATIERES

1. Introduction 17
1.1. Le concept de représentation temps fréquence
1.1.1 Localisation des signaux dans le plan temps fréquence 21
1.2. Des propriétés demandées à une représentation temps fréquence 22

2. La représentation temps fréquence de type Fourier à court terme 28
2.1. Fourier à court terme comme produit de convolution 28
2.2. Les propriétés de la représentation temps fréquence de type Fourier à court terme 32
2.3. Un exemple 40

3. La représentation temps fréquence de type fonction d'ambiguïté 45
3.1. Autres formules pour la fonction d'ambiguïté 45
3.2. Les propriétés de la représentation temps fréquence de type fonction d'ambiguïté 52
3.3. Un exemple 60

4. La représentation temps fréquence de type Wigner- Ville 64
4.1. Autres formules pour la représentation de Wigner-Ville 64
4.2. Les propriétés de la représentation temps fréquence de type Wigner- Ville 66
4.3. Un exemple 78

5. La représentation temps fréquence de type transformée en ondelettes continue 80
5.1. Autres formules pour la représentation temps fréquence de type transformée en ondelettes continue 80
5.2.Les propriétés de la représentation temps fréquence de type transformée en ondelettes continue 82
5.3. Un exemple 84

6. Des généralisations 86
6.1. Le cas des représentations linéaires 86

6.2. Les représentations bilinéaires. La classe de Cohen 91
6.2.1. Le cas des représentations temps fréquence 92
6.2.2. Le cas des représentations temps échelle 95
6.3. La relation entre les représentations bidimenssionelles et la théorie des signaux aléatoires 99
6.3.1. Distributions de puissance 102

7. La discrétisation des représentations temps fréquence 106
7.1. La discrétisation des représentations linéaires 106
7.1.1. La discrétisation de la représentation temps Fréquence de type Fourier à court terme 109
7.1.2. La discrétisation de la représentation temps Fréquence de type transformée en ondelettes continue 123
7.1.2.1. Bases orthonormées d'ondelettes 134
7.1.2.2. Les analyses multirésolution 144
7.1.2.3. Les décompositions orthogonale 158
7.1.2.4. La caractérisation des analyses multirésolution à l'aide des polynômes 176
7.1.2.5. L'algorithme de Mallat 192
7.1.2.6. La dérivation et l'intégration dans les analyses multirésolution 198
7.1.2.7. Variations sur le thème des bases orthonormées d'ondelettes 200
7.1.2.8. Bases biorthogonales d'ondelettes 228
7.1.2.9. La généralisation de la notion d'analyse multirésolution 255
7.1.2.10. Paquets d'ondelettes 272
7.2. L'analyse des signaux nonstationnaires en utilisant un dictionnaire temps fréquence 294
7.3. La discrétisation des représentations bilinéaires 298
7.4. Atomes temps fréquence et représentations bilinéaires 302
308

8. Algorithmes et logiciels pour le calcul des représentations temps fréquence
8.1. L'utilisation de l'algorithme FFT pour le calcul des représentations temps fréquence 308

8.2.1. L'initialisation de l'algorithme de Mallat 310
8.2.2. L'implémentation de l'algorithme de Mallat 315
8.2.3. L'algorithme de Mallat pour les images 320
8.3. Algorithmes pour l'analyse temps fréquence basés sur les paquets d'ondelettes 324
8.4. Quelques logiciels pour l'analyse temps fréquence 326
8.4.1. Le logiciel JTFA 326
8.4.2. Le logiciel Mega Wave 2 336
8.4.3. Sur WaveLab 338

9. Applications 350
9.1. Les applications des représentations temps fréquence en Radar 350
9.2. Les applications des représentations temps fréquence en exploration seismique 352
9.3. L'utilisation des représentations temps fréquence pour la détection des défauts mécaniques 352
9.4. Les applications des représentations temps fréquence en médicine 353
9.5. Les applications des représentations temps fréquence en Métrologie 356
9.5.1. L'estimation de la fréquence instantanée 356
9.5.2. L'estimation de la bande de fréquences Instantanée 364
9.5.3. La compréssion de données en métrologie 366
9.6. Quelques applications en télécommunications 379
9.6.1. L'utilisation des représentations temps Fréquence pour le traitement de la parole 379
9.6.2. L'augmentation du rapport signal/bruit en utilisant les ondelettes 382
9.6.3. L'utilisation des représentations temps Fréquence pour le traitement des images 388
9.6.4. Autres applications en télécommunications 390
Bibliographie
391
Index 400

Capitolul 1

INTRODUCERE

"Prelucrarea semnalelor" are ca scop modelarea matematică a fenomenelor utilizate în tehnică. Garanția evoluției în acest domeniu de cercetare este permanenta îmbunătățire a preciziei cu care modelele create descriu realitatea fenomenului modelat. De aceea e necesar să se utilizeze metode matematice tot mai evoluate. Deşi fenomenele staționare sunt mai simplu de modelat, în prezent este tot mai cerută analiza fenomenelor nestaționare.

1.1. CONCEPTUL DE REPREZENTARE TIMP FRECVENȚĂ

Unul dintre semnalele cel mai des utilizate este semnalul sinusoidal. Acesta este descris matematic de funcția:

$$x_o(t) = A_o \sin \omega_o t \qquad (1)$$

parametrizată după constantele: A_o- amplitudine şi ω_o- pulsație. Pentru cunoaşterea acestui semnal este suficientă cunoaşterea legii sale de variație în timp (relația (1)) şi a parametrilor săi A_o şi ω_o. Este evident vorba de un semnal staționar. Un alt exemplu de semnal staționar este impulsul descris în relația :

$$x_1(t) = A_1 \left(\sigma(t) - \sigma(t - \tau)\right) \qquad (2)$$

Parametrii acestui semnal sunt: amplitudinea sa A_1 , durata sa τ, precum şi momentul declanşării, $t_o = 0$.

Pe baza celor două exemple se poate afirma că semnalele staționare au parametrii constanți. Această observație este valabilă şi pentru semnalele aleatoare staționare, dacă considerăm că în acest caz, parametrii semnalului sunt momentele sale statistice (media, dispersia, ...).

De aceea se poate afirma că semnalele nestaționare (deterministe) au parametrii variabili în timp. Astfel, dacă :

$$A_o = \cos 10\, \omega_o t \qquad (3)$$

sau:

$$\omega_o = t \qquad (4)$$

semnalul descris de relația (1) va fi unul nestaționar.

În primă aproximație semnalul din relația (1) este util pentru descrierea funcționării unui oscilator, putând fi folosit pentru proiectarea acestui circuit. Dar variațiile tensiunii de alimentare a oscilatorului se reflectă asupra amplitudinii

semnalului de la ieşirea sa, iar variațiile de temperatură pot produce modificări ale frecvenței de oscilație. De asemenea, relația (1) nu este adecvată pentru descrierea regimurilor de pornire ale oscilatorului. Iată de ce, la o analiză mai atentă, semnalul de la ieşirea unui oscilator trebuie considerat ca fiind nestaționar.

Şi în cazul semnalelor aleatoare, folosite pentru modelarea unor fenomene reale (vibrațiile unei maşini unelte, zgomotul unui motor electric, ş.a.), ipoteza de staționaritate trebuie evitată tot mai frecvent.

Fenomenele nestaționare pot fi clasificate în doua categorii: adaptive şi evolutive [85].

În cazul fenomenelor nestaționare adaptive, nestaționaritatea este suficient de lentă pentru a se putea presupune, pentru intervale scurte de timp, că parametrii semnalelor sunt constanți.

Fenomenele nestaționare evolutive necesită modalități de descriere globală a variațiilor parametrilor lor. De aceea, în acest caz, aceste variații pot fi rapide.

Rezultă că pentru analiza semnalelor nestaționare adaptive este necesară o prelucrare localizată în timp. De aceea în acest caz nu poate fi utilizată transformata Fourier. Această afirmație este justificată de următorul fragment din articolul "Cables et Transmision" scris de J.Ville în anul 1948:

"*Dacă considerăm un fragment de muzică compus din mai multe măsuri şi dacă o notă, "la", de exemplu, figurează o dată în acest fragment, analiza Fourier ne va prezenta frecvența corespunzătoare cu o anumită amplitudine şi cu o anumită fază, fără a localiza "la" - ul în timp. Ori, este evident că pe parcursul bucății există momente de timp când nu se aude nota "la"* ".

Deci a apărut necesitatea introducerii unor noi transformări. Reprezentările timp-frecvență sunt uneltele necesare pentru analiza semnalelor nestaționare. Această analiză presupune identificarea parametrilor acestor semnale. Pe lista acestor parametri trebuie incluşi: momentele de timp de începere şi terminare a semnalului, energia sau puterea semnalului, amplitudinea instantanee, frecvența instantanee, banda de frecvență instantanee a semnalului, etc.

Se reaminteşte definiția frecvenței instantanee a unui semnal, [37]. Se consideră în acest scop semnalul real $x(t)$.

Definiția 1 Se numeşte transformată Hilbert a semnalului $x(t)$, semnalul:

$$H\{x(t)\} = \mathrm{VP}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} * x(t) = \frac{1}{\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Definiția 2 Se numeşte semnal analitic asociat semnalului $x(t)$, semnalul:

$$x_a(t) = x(t) + j\, H\{x(t)\}$$

Definiția 3 Se numeşte anvelopă a semnalului $x_a(t)$, semnalul:

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + H^2\{x(t)\}}$$

Definiția 4 Se numeşte pulsație instantanee a semnalului $x(t)$, semnalul:

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt}\{\arg\{x_a(t)\}\} = 2\pi f_i(t)$$

În funcție de aplicația avută în vedere este importantă estimarea unuia sau mai multor parametri ai semnalului nestaționar. Acum câțiva ani firma Hewlet Packard a început să producă o gamă de aparate numite analizoare în domeniul modulației. Primul produs din această gamă a fost HP-5371A. Aceste aparate măsoară frecvența instantanee a semnalelor pe care le analizează. În figura 1.1.1 este prezentată o reprezentare "timp-frecvență" ideală a semnalului nestaționar:

$$x(t) = A_o \cos(\omega_o(t)\, t);\ \text{cu}\ \omega_o(t) = \begin{cases} 2\pi f_1, & t \in [t_1, t_2), \\ 2\pi f_2, & t \in [t_3, t_4), \\ 2\pi f_3, & t \in [t_5, t_6), \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Semnalul analitic asociat acestui semnal are forma:

$$x_a(t) = A_o \cdot e^{j\omega_o(t)\, t}$$

Frecvența instantanee a semnalului $x(t)$ este:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(\omega_o(t)\, t) = \begin{cases} f_1, & t \in [t_1, t_2), \\ f_2, & t \in [t_3, t_4), \\ f_3, & t \in [t_5, t_6), \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Se constată că linia îngroşată din figura 1.1.1 este tocmai graficul acestei funcții.
Analizând reprezentarea tridimensională din figura 1.1.1, se constată faptul că semnalul $x(t)$ se declanşează la momentul t_1, fiind o sinusoidă cu frecvența f_1, până la momentul t_2, când semnalul încetează, pentru a se redeclanşa la momentul t_3, fiind o sinusoidă cu frecvența f_2 până la momentul t_4 când încetează pentru a doua oară declanşându-se din nou la momentul t_5 fiind o sinusoidă cu frecvența f_3 până la momentul t_6 când se sfârşeşte definitiv. Se constată că proiecția "reprezentării timp- frecvență" din figura 1.1.1 pe planul

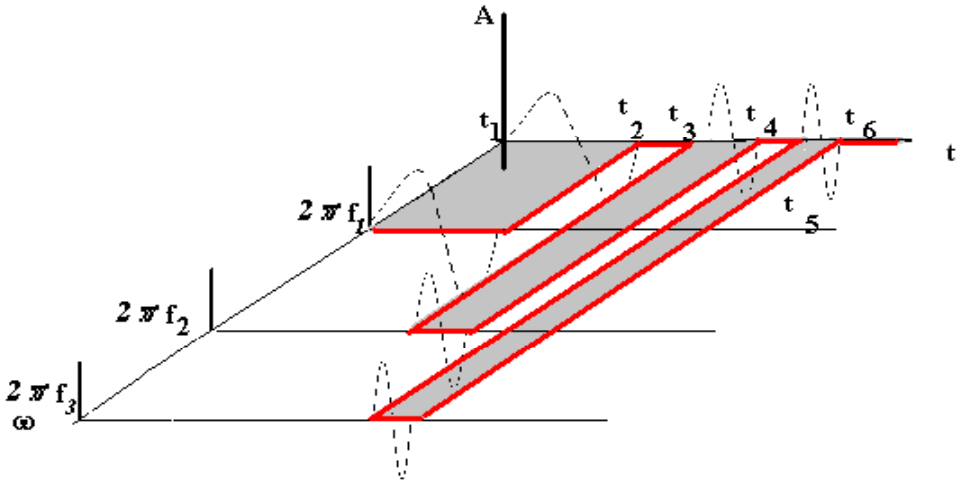


Figura 1.1.1. O reprezentare timp frecvență ideală.

$(A,\ t)$ reprezintă oscilograma semnalului $x(t)$, că proiecția pe planul $(f,\ A)$ reprezintă spectrul "ideal" al semnalului $x(t)$ şi că proiecția pe planul $(f,\ t)$ reprezintă frecvența instantanee a aceluiaşi semnal. Proiecția pe planul $(A,\ t)$ permite analiza în domeniul timp a semnalului considerat. Proiecția pe planul $(A,\ f)$ permite analiza semnalului în domeniul frecvență iar proiecția pe planul $(f,\ t)$ permite analiza în domeniul modulației [69]. Analizoarele în domeniul modulației afişează legea de variație temporală a frecvenței instantanee a semnalului de analizat. Figura 1.1.1 este o reprezentare timp-frecvență a semnalului *x(t)*. Se remarcă faptul că această reprezentare face o localizare perfectă în domeniile timp şi frecvență ale semnalului considerat. Într-adevăr, momentele t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 şi t_6 ca şi frecvențele f_1 f_2 şi f_3 pot fi exact localizate cu ajutorul acestei reprezentări. De aceea această reprezentare a fost numită ideală. O astfel de reprezentare nu poate fi obținută în practică, dar poate fi utilizată ca model pentru optimizarea reprezentărilor timp-frecvență care se utilizează în practică.
În realitate există o limitare a concentrării unui semnal în planul timp-frecvență, dată de principiul lui Heisenberg [99].

1.1.1. LOCALIZAREA SEMNALELOR ÎN PLANUL TIMP-FRECVENȚĂ

Într-adevăr, pe baza dualității transformatei Fourier semnalele de durată limitată (perfect localizate în timp) sunt de bandă nelimitată, (deci nu sunt localizate

în domeniul frecvență). Reciproc, semnalele de bandă limitată au durata infinită. De aceea pentru măsurarea acestor cantități se utilizează noțiunile de "durată efectivă", σ_t şi de "bandă de frecvențe" efectivă, σ_ω definite astfel:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |x(\tau)|^2 \, d\tau ; \quad \sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

Conform principiului lui Heisenberg [99] este adevărată inegalitatea:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq \frac{\pi}{2}$$

Cu cât durata efectivă a unui semnal este mai scurtă cu atât banda sa efectivă de frecvențe este mai largă. Deci nici un semnal nu poate fi localizat oricât de bine şi în domeniul timp şi în domeniul frecvență. Semnalul cu cea mai bună localizare în planul timp-frecvență este acela pentru care în ultima relație este valabil semnul egal. Acesta este semnalul Gaussian:

$$x(t) = e^{-\frac{\pi}{2} t^2}$$

Pentru toate celelalte semnale localizarea în planul timp-frecvență se face în intervale şi mai lungi. Câteva exemple sunt prezentate în tabelul 1.1.1. Se constată că există semnale, cum este de exemplu impulsul dreptunghiular, care nu pot fi localizate în planul timp-frecvență. Totuşi, şi aceste semnale au o anumită "semnătură" în planul timp-frecvență. Pe baza acesteia ele pot fi identificate în planul timp-frecvență.

Revenind la exemplul din figura 1.1.1 se constată că semnalului $x(t)$ i s-a asociat o funcție de două variabile, reprezentarea sa timp-frecvență. În continuare se va nota reprezentarea timp-frecvență a semnalului $x(t)$ cu $TF_x(\omega, t)$. Semnalul $x(t)$ va fi considerat de energie finită. Reprezentarea timp-frecvență va fi privită ca şi un operator care transformă spațiul $L^2(R)$ într-un spațiu $L^2(A \times R)$. Cel mai adesea acesta va fi $L^2(R^2)$. Valoarea operatorului TF aplicat semnalului *x* este deci funcția de 2 variabile $TF_x(\omega, t)$. Valoarea acestei funcții în punctul (t_o, ω_o) reprezintă valoarea la momentul t_o, a componentei spectrale de pulsație ω_o a semnalului considerat.

Deci funcția $TF_x(\omega, t)$ are semnificația de densitate spectro-temporală a semnalului $x(t)$. Funcția $TF_x(\omega, t_o)$ are semnificația de spectru instantaneu al semnalului considerat.

Pentru a fi util în analiza semnalelor nestaționare, operatorul TF ar trebui să aibe câteva proprietăți. În continuare se face un inventar al acestor proprietăți.

Tipul semnalului	Expr. analitică a semnalului	Transformata Fourier
Gaussian	$e^{-\frac{\pi}{2}t^2}$	$\sqrt{2}\,e^{-\frac{\omega^2}{2\pi}}$
Chirp	$\sqrt[4]{\frac{2\alpha}{\pi}}\,e^{-(\alpha+j\beta)t^2}$	$\frac{\sqrt[4]{2\alpha\pi}}{\sqrt{\alpha+j\beta}}\,e^{-\frac{\omega^2(\alpha-j\beta)}{4(\alpha^2+\beta^2)}}$
Impuls dreptunghiular	$\frac{1}{t_o}\left[\sigma\left(t+\frac{t_o}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{t_o}{2}\right)\right]$	$\text{sinc}\,\frac{\omega}{2}$

Tipul semnalului	σ_t^2	σ_ω^2	$\sigma_t^2\sigma_\omega^2$
Gaussian	$\frac{1}{2\pi}$	π^2	$\frac{\pi}{2}$
Chirp	$\frac{1}{4\alpha}$	$\frac{2\pi(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha}$	$\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$
Impuls Dreptunghiular	$\frac{t_o}{12}$	∞	∞

Tabelul 1.1.1. Localizarea în planul timp-frecvență a câtorva semnale uzuale.

1.2. PROPRIETĂȚI CERUTE UNEI REPREZENTĂRI TIMP-FRECVENȚĂ

Aceste proprietăți trebuie să răspundă unor deziderate legate de:

- interpretarea fizică a reprezentării considerate,
- compabilitatea reprezentării considerate cu celelalte reprezentări utilizate în prelucrarea semnalelor
- evidențierea nestaționarităților din structura semnalului analizat.

În continuare se prezintă câteva proprietăți ale reprezentărilor timp-frecvență care le fac capabile să corespundă dezideratelor de mai sus. După cum s-a arătat deja semnificația fizică a unei reprezentări timp-frecvență este cea de densitate spectro-temporală de energie. În acest sens, este necesar ca energia semnalului analizat să reprezinte integrala densității spectro-temporale de energie. E deci util ca să aibe loc proprietatea:

$$\text{P1.}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} TF_x(t,\omega)\,dt\,d\omega = 2\pi E_x \tag{5}$$

Dar energia semnalului $x(t)$ poate fi calculată pe baza relațiilor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = E_x \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega = 2\pi E_x \tag{7}$$

Comparând relațiile (5) şi (6), respectiv (5) şi (7) rezultă utilitatea proprietăților marginale descrise de relațiile:

$$\text{P2.}\quad \int_{-\infty}^{\infty} TF_x(t,\omega)\,d\omega = 2\pi\,|x(t)|^2 \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} TF_x(t,\omega)\,dt = |X(\omega)|^2 \tag{9}$$

Aceste proprietăți marginale arată necesitatea ca densitățile energetice de o singură variabilă $|x(t)|^2$ şi $|X(\omega)|^2$ să se poată calcula pe baza reprezentării timp-frecvență $TF_x(t,\omega)$.

Relațiile (8) şi (9) arată că densitățile energetice de o singură variabilă sunt funcții reale şi pozitive. Din necesitatea ca reprezentarea timp-frecvență să reprezinte o funcție reală pozitivă rezultă proprietatea:

$$\text{P3.}\quad (\forall)(\omega,t)\in R\times R,\quad TF_x(t,\omega)\in R^+ \tag{10}$$
$$(\forall)\,x(t)\in L^2(R)$$

Tot din rațiuni de interpretare fizică ar fi util ca:

P4. Reprezentarea timp-frecvență să fie o transformare cauzală;

şi ca:

P5. Reprezentarea timp-frecvență să fie o transformare inversabilă.

Cea mai utilizată reprezentare în domeniul prelucrării semnalelor rămâne

transformarea Fourier. De aceea este util ca reprezentările timp-frecvență să fie compatibile cu acestă transformare. Următoarele cinci proprietăți ale reprezentărilor timp-frecvență sunt utile scopului de compatibiliazare cu transformarea Fourier. De fapt ele sunt echivalente unor proprietăți corespunzătoare ale transformării Fourier.

Prima dintre acestea corespunde proprietății de translație în timp a transformării Fourier.

P6. Fie $x_{t_o,\omega_o}(t)$ semnalul obținut prin translatarea în planul timp-frecvență a semnalului $x(t)$:

$$x_{t_o,\omega_o}(t) = x(t - t_o)\, e^{j\omega_o t}$$

Legătura dorită între reprezentările timp-frecvență ale semnalelor $x(t)$ şi $x_{t_o,\omega_o}(t)$ este:

$$\mathrm{TF}_{x_{t_o,\omega_o}}(t, \omega) = \mathrm{TF}_x(t - t_o, \omega - \omega_o) \tag{11}$$

Următoarea proprietate dorită pentru reprezentările timp-frecvență corespunde proprietății de dilatare a transformării Fourier.

P7. Fie $x_k(t)$ semnalul obținut prin dilatarea semnalului $x(t)$:

$$x_k(t) = \sqrt{k}\, x(k\, t), \quad k > 0$$

Legătura dorită între reprezentările timp-frecvență ale semnalelor $x(t)$ şi $x_k(t)$ este :

$$\mathrm{TF}_{x_k}(t, \omega) = \mathrm{TF}_x\left(k\, t, \frac{\omega}{k}\right) \tag{12}$$

Una dintre cele mai importante proprietăți ale transformării Fourier este cea de filtraj. Această operație este descrisă în domeniul timp prin convoluție. Proprietatea corespunzătoare a reprezentărilor timp-frecvență ar fi:

P8. Fie $y(t)$ semnalul obținut prin filtrarea semnalului $x(t)$ cu un filtru cu răspunsul la impuls $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Legătura dorită dintre reprezentările timp-frecvență ale semnalelor $x(t)$, $h(t)$ şi $y(t)$ este:

$$TF_y(t,\ \omega)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} TF_h(t-s,\ \omega)\ TF_x(s,\ \omega)\, ds \tag{13}$$

O altă proprietate importantă a transformării Fourier este cea de modulație. Proprietatea corespunzătoare pentru reprezentările timp frecvență ar fi:

P9. Fie $y(t)$ semnalul obținut prin modularea de produs a semnalului $x(t)$ cu semnalul $m(t)$:

$$y(t)\ =\ x(t)\ \ m(t)$$

Legătura dorită dintre proprietățile timp-frecvență ale semnalului $x(t)$, $m(t)$ şi $y(t)$ este:

$$TF_y(t,\ \omega)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} TF_m(t,\ \omega-\ \xi)\ TF_x(t,\ \xi)\, d\xi \tag{14}$$

În sfârşit, o altă posibilitate remarcabilă a transformării Fourier a semnalelor de energie finită este că aceasta reprezintă o izometrie între spațiile $L^2(\mathrm{R})$ şi $L^2(\mathrm{R})$. Este deci conservat produsul scalar:

$$(\forall)\,\mathrm{x(t)},\,\mathrm{y}(t)\ \in\ L^2\ (R)\,;\quad \langle x(t),\,y(t)\rangle_{L^2(R)} = \frac{1}{2\pi}\langle X(\omega),\ Y(\omega)\rangle_{\ L^2(R)}$$

[99]. Conservarea produsului scalar în cazul reprezentărilor timp-frecvență s-ar putea exprima prin următoarea proprietate de unitaritate:

P10. Oricare ar fi semnalele $x(t)$ şi $y(t)$ de energie finită, are loc relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} TF_x(t,\ \omega)\ TF_y^{*}(t,\ \omega)\, dt\, d\omega\ =\ \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ y^{*}(t)\, dt\right|^2 \tag{15}$$

Formula din relația (15) poartă numele lui Moyal [59]. Următorul grup de proprietăți ale reprezentărilor timp-frecvență ar fi utile pentru evidențierea

nestaționarităților semnalului de analizat. După cum s-a arătat deja în paragraful anterior este de dorit ca reprezentarea timp-frecvență analizată să localizeze bine semnalul de analizat în planul timp-frecvență. De aceea ar fi util ca reprezentarea timp-frecvență considerată să conserve suporturile temporal şi/sau frecvențial ale semnalului de analizat. Proprietatea de conservare a suporturilor are enunțul următor:

P11.

$$x(t) = 0, \ |t| > T \quad \Rightarrow \quad TF_x(t, \omega) = 0, \ |t| > T \tag{16}$$

$$X(\omega) = 0, \ |\omega| > B \quad \Rightarrow \quad TF_x(t, \omega) = 0, \ |\omega| > B \tag{17}$$

Ar fi, de asemenea util, dacă pe baza reprezentării timp-frecvență s-ar putea decide dacă semnalul de analizat este staționar sau nu.

După cum s-a arătat în paragraful anterior un semnal staționar determinist este unul care are toți parametrii constanți. Deci un semnal staționar determinist poate fi privit ca şi o sumă de componente, fiecare având amplitudinea instantanee şi frecvența instantanee constante.

Reprezentarea timp-frecvență a unui astfel de semnal ar trebui să fie independentă de timp. De aceea proprietatea de staționaritate a semnalului de analizat în planul timp-frecvență ar putea avea următorul enunț:

P12. Fie $x_s(t)$ un semnal staționar determinist. Atunci are loc relația:

$$\frac{\partial\, TF_x(t,\omega)}{\partial\, t} = 0 \qquad (\forall)\ t \in R \tag{18}$$

În sfârşit, ar fi evident util dacă reprezentarea timp-frecvență a unui semnal s-ar concentra cât mai mai mult în jurul curbei din planul timp-frecvență care descrie frecvența instantanee a acestui semnal (aşa cum se vede în figura 1.1.1). În acest mod ar fi uşor de estimat legea de variație a frecvenței instantanee a semnalului analizat pe baza reprezentării sale timp-frecvență. Proprietatea care exprimă această concentrare are următorul enunț:

P13. Fie $x_a(t)$ semnalul analitic asociat semnalului $x(t)$ cu frecvența instantanee $f_i(t)$. Atunci are loc relația:

$$TF_{x_a}(t, \omega) = \delta\left(\omega - 2\pi f_i(t)\right) \tag{19}$$

În ultima relație cu δ s-a notat distribuția Dirac.

Alte proprietăți utile pentru reprezentările timp-frecvență sunt prezentate în [59].

Orice reprezentare timp-frecvență ar trebui să aibe cele 13 proprietăți enunțate mai sus. Din păcate nu există nici o reprezentare timp-frecvență care să aibe toate cele 13 proprietăți.

De aceea pentru diferite clase de semnale de analizat este utilă folosirea unor reprezentări timp-frecvență diferite.

În continuare se prezintă câteva reprezentări timp-frecvență dintr-o perspectivă istorică.

Capitolul 2

REPREZENTAREA TIMP-FRECVENȚĂ DE TIP TRANSFORMARE FOURIER SCURTĂ

În anul 1890, în teza sa de doctorat, Sommerfeld a folosit pentru prima oară noțiunea de spectru instantaneu. Ideea sa era să înlocuiască analiza Fourier "globală", care pierde noțiunea de cronologie, printr-o succesiune de analize "locale" relative la o fereastră de observare alunecătoare. Această idee s-a materializat în anul 1945 prin inventarea "sonografului". Prin construcție acest aparat lucrează în domeniul frecvență. El măsoară succesiv puterea de la ieşirile unor filtre trece-bandă conectate în derivație. Rezultatul analizei făcute de sonograf se numeşte sonogramă. Sonograma reprezintă pătratul modulului reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă (RTFTFS). Descrierea acestei reprezentări timp-frecvență este:

$$\mathrm{TF}_x^{STFT}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, w(\tau - t)\, \mathrm{e}^{-j\omega\tau}\, \mathrm{d}\tau \tag{20}$$

unde $w(t)$ reprezintă fereastra de observare. De obicei se consideră că fereastra de observare este un semnal de energie unitară:

$$\|w(t)\|_{\mathrm{L}^2}^2 = 1$$

Pe baza relației (20) se constată faptul că la momentul t, funcția $TF_{\mathrm{x}}^{\mathrm{STFT}}(\mathrm{t},\ \omega)$ reprezintă spectrul semnalului $x(\tau)\, w(\tau - t)$, obținut prin localizarea în timp, în jurul momentului considerat, a semnalului de analizat, $x(\tau)$. Modificând t de la $-\infty$ la $+\infty$, fereastra temporală "mătură", forma de undă a întregului semnal de analizat. Rezultă că fereastra temporală folosită este responsabilă pentru localizarea temporală a semnalului de analizat. Dar, după cum s-a arătat deja, cea mai bună localizare în planul "timp-frecvență" o are semnalul Gaussian. De aceea, o reprezentare timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă cu proprietăți bune de localizare în planul timp-frecvență ar trebui să fie aceea care foloseşte fereastra temporală Gaussiană. Acest tip de transformare Fourier scurtă se numeşte transformare Gabor. Pentru a putea analiza proprietățile reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă este utilă prezentarea unor exprimări alternative ale acestor reprezentări timp-frecvență.

2.1 EXPRIMAREA REPREZENTĂRII TIMP-FRECVENȚĂ DE TIP TRANSFORMARE FOURIER SCURTĂ CA ŞI PRODUS DE CONVOLUȚIE

Se consideră familia de funcții: $\left\{ w_{\omega,t}(\tau) = e^{j\omega\tau} w(\tau - t) \right\}_{(\omega,t)\ \in R^2}$

Relaţia (20) poate fi rescrisă ca şi produs scalar dintre semnalul de analizat şi fiecare element al acestei mulţimi. Într-adevăr:

$$TF_x^{STFT}(t,\ \omega) \ = \ \left\langle x(\tau),\ w_{\omega,t}(\tau) \right\rangle_{L^2} \tag{21}$$

Această exprimare are avantajul că transferă propietăţile produsului scalar asupra reprezentării timp-frecvenţă de tipul transformare Fourier scurtă. Valoarea reprezentării timp-frecvenţă de tipul transformare Fourier scurtă în punctul de coordonate $(t_o,\ \omega_o)$ depinde de funcţia:

$$w_{\omega_0,t_0}(\tau) \ = \ e^{j\omega_0\tau} w(\tau - t_o)$$

Transformata Fourier a acestei ferestre temporale este:

$$\begin{aligned} W_{\omega_0,t_0}(\omega) \ &= \ F\left\{e^{j\omega_0\tau} w(\tau - t_o)\right\} \ = \ F\left\{w(\tau - t_o)\right\}(\omega + \omega_o) \ = \\ &= \ e^{-j\cdot t_0(\omega+\omega_o)}\ F\left\{w(t)\right\}(\omega + \omega_o) \ = \ e^{-j\cdot t_0(\omega+\omega_o)}\ W(\omega + \omega_o) \end{aligned} \tag{22}$$

În continuare această transformată Fourier va fi numită fereastră frecvenţială. Se constată că fereastra temporală $w_{\omega_0,t_0}(\tau)$ este centrată pe momentul t_o şi că fereastra frecvenţială $W_{\omega_0,t_0}(\omega)$ este centrată pe pulsaţia - ω_o. Deci la momentul t_o, prin modificarea lui ω_o între $-\infty$ şi $+\infty$, fereastra frecvenţială $W_{\omega_0,t_0}(\omega)$ "mătură" spectrul semnalului $x(t)$. La momentul t_o şi la pulsaţia ω_o, reprezentarea timp-frecvenţă de tipul transformare Fourier scurtă descrie semnalul $x(t)$ într-o regiune din planul timp-frecvenţă limitată de suporturile ferestrelor temporală $w_{\omega_0,t_0}(\tau)$ şi frecvenţială $W_{\omega_0,t_0}(\omega)$. Prin modificarea valorilor t_o şi ω_o, poate fi acoperit întreg planul timp-frecvenţă.

Rezultă că localizarea în planul timp-frecvenţă a porţiunii din semnalul $x(t)$ analizată la momentul t_o şi la pulsaţia ω_o, depinde de localizarea în planul timp-frecvenţă a ferestrei $w_{\omega_0,t_0}(\tau)$. De aceea se poate afirma că dintre toate transformările Fourier scurte cea care face cea mai bună localizare în planul timp-frecvenţă a unui semnal este transformarea Gabor.

Pe lângă fereastra Gaussiană se mai folosesc şi alte ferestre temporale în prelucrarea semnalelor. Câteva dintre acestea, folosite în analiza spectrală, sunt prezentate în tabelul 1.2.1. Din analiza tabelului se constată că nici una dintre aceste ferestre nu are o localizare în frecvenţă satisfăcătoare.

Tipul ferestrei	Descrierea analitică	σ_t^2	σ_ω^2
Dreptun-ghiulară	$\frac{1}{t_o}\left[\sigma\left(t+\frac{t_o}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{t_o}{2}\right)\right]$	$\frac{t_o}{12}$	∞
Hamming generali - zată	${}_\alpha w_{Hg}(t)=\frac{1}{\alpha t_0}\left[\alpha+(1-\alpha)\cos\left(\frac{2\pi}{t_o}t\right)\right]\left[\sigma\left(t+\frac{t_o}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{t_o}{2}\right)\right]$	${}_\alpha\sigma_t^2=\frac{t_o^2(\pi^2\alpha+6\alpha-6)}{12\,\alpha\,\pi^2}$	∞
Hann	${}_{0,5}w_{Hg}$	${}_{0,5}\sigma_t^2$	∞
Hamming	${}_{0,54}w_{Hg}$	${}_{0,54}\sigma_t^2$	∞
Blackman	$k\left(0{,}42+0{,}5\cos\frac{2\pi t}{t_o}+0{,}08\cos\frac{4\pi t}{t_o}\right)\left[\sigma\left(t+\frac{t_o}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{t_o}{2}\right)\right]$	finit	∞

Tabelul 1.2.1 Exemple de ferestre temporale.

Revenind la relația (21) şi considerând că fereastra temporală este o funcție reală se poate scrie:

$$TF_x^{STFT}(t,\,\omega)\;=\;\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\left[e^{j\omega\tau}w(\tau-t)\right]^*d\tau$$

Cu notația:

$$x(\mathrm{t})e^{-j\omega t}\;=\;u(\mathrm{t})$$

ultima relație devine:

$$\mathrm{TF}_x^{STFT}(t,\,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\,w(\tau-t)\,dt\;=\;\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\,w^\vee(t-\tau)\,dt\;=\;u(t)*w^\vee(t)\qquad(23)$$

unde s-a folosit notația:

$$w^\vee(t)\;=\;w(-t)$$

Realția (23) a dat titlul acestui paragraf. Importanța sa rezidă în faptul că permite o nouă interpretare fizică a reprezentării timp-frecvență de tipul tranformare Fourier scurtă. Într-adevăr, pentru fiecare pulsație, ω, se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul Fourier scurtă reprezintă răspunsul sistemului liniar şi invariant în timp cu răspunsul la impuls $w^{\vee}(t)$, la semnalul $u(t)$. Acest semnal se obține prin modularea semnalului $x(t)$, folosind semnalul purtător $e^{-j\omega t}$.

În figura 1.2.1 este prezentată schema sistemului analogic care transformă semnalul $x(t)$ în reprezentarea sa timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă.

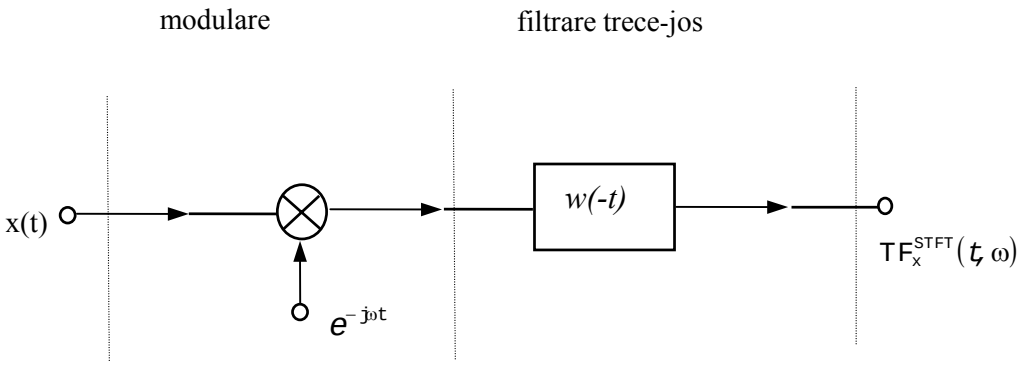


Figura 1.2.1 Sistem analogic de implementare a reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă.

O exprimare alternativă a relației (23) este:

$$TF_x^{STFT}(t, \omega) = e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, w(\tau - t)\, e^{j\omega(t-\tau)}\, d\tau = e^{-j\omega t}\left[x(t) * w^{\vee}(t) e^{j\omega t}\right] \qquad (24)$$

cu implementarea prezentată în figura 2.2.1.

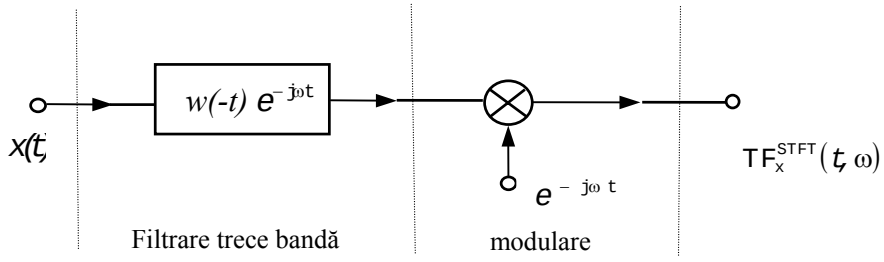


Fig. 2.2.1. O altă metodă de implementare a reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă.

2.2 PROPRIETĂȚILE REPREZENTĂRII TIMP-FRECVENȚĂ DE TIP TRANSFORMARE FOURIER SCURTĂ

La fel ca şi în cazul transformării Fourier şi reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă poate fi calculată mai uşor pe baza proprietăților sale. De aceea este important studiul acestora. În primul rând trebuie remarcat că această reprezentare este descrisă de un operator liniar.

R1. $(\forall)\, x_1(t),\, x_2(t) \in L^2(R)$ şi $(\forall)\alpha, \beta \in C$

$$TF^{STFT}_{\alpha x_1 + \beta x_2}(t,\, \omega) = \alpha\, TF^{STFT}_{x_1}(t,\, \omega) + \beta\, TF^{STFT}_{x_2}(t,\, \omega)$$

Demonstrație:

$$TF^{STFT}_{\alpha x_1 + \beta x_2}(t,\, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha\, x_1(\tau) + \beta\, x_2(\tau))\, w(\tau - t)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

sau pe baza liniarității operației de integrare:

$$TF^{STFT}_{\alpha x_1+\beta x_2}(t,\, \omega) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, w(\tau - t)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\, w(\tau - t)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau =$$
$$= \alpha\, TF^{STFT}_{x_1}(t,\, \omega) + \beta\, TF^{STFT}_{x_2}(t,\, \omega)$$

În consecință, pentru evaluarea reprezentării timp-frecvență de tip transformare Fourier scurtă poate fi aplicat principiul superpoziției. Această observație permite extinderea clasei semnalelor ce pot fi analizate cu reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă de la clasa semnalelor de energie finită la alte clase de semnale, cum ar fi de exemplu semnalele periodice. În continuare se verifică dacă reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă are proprietățile specificate în paragraful 1.2. Se calculează integrala dublă:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} TF^{STFT}_{x}(t,\, \omega)\, dt\, d\omega$$

Se începe cu calculul integralei:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} TF^{STFT}_{x}(t,\, \omega)\, d\omega$$

Ținând seama de definiția reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă, ultima integrală devine:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F\left\{x(\tau)\, w(\tau - t)\right\}\, d\omega = (2\pi)\; F^{-1}\left\{F\left\{x(\tau)\, w(\tau - t)\right\}(\omega)\right\}(\tau)\Big|_{\tau = 0} =$$

$$= 2\pi\, x(0)\, w^{\vee}(t)$$

S-a demonstrat că:

$$\int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{\mathrm{STFT}}(t,\, \omega)\, d\omega = 2\pi\, x(0)\, w^{\vee}(t) \tag{25}$$

Valoarea integralei I este deci:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\, x(0)\, w^{\vee}(t)\, dt = 2\pi\, x(0) \int_{-\infty}^{\infty} w^{\vee}(t)\, dt$$

Până acum s-a presupus că fereastra temporală $w(t)$ este de energie unitară. Dacă facem ipoteza suplimentară că fereastra temporală este şi absolut integrabilă, atunci putem afirma că integrala I este convergentă.

Dar valoarea sa este diferită de energia semnalului *x(t)*. Deci proprietatea P1 nu este satisfăcută. Reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă nu este o densitate spectro-temporală de energie. Totuşi trebuie remarcat că ea reprezintă o izometrie până la o constantă de proporționalitate între spațiile $L^2(\mathrm{R})$ şi $L^2(\mathrm{R}^2)$, [89].

R2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{TF}_x^{\mathrm{STFT}}(t,\, \omega)\right|^2\, dt\, d\omega = 2\pi\, \mathrm{E}_x \tag{26}$$

Demonstrație:

$$\mathrm{TF}_x^{\mathrm{STFT}}(t,\, \omega) = F\left\{x(\tau)\, w(\tau - t)\right\}(\omega)$$

Se calculează pentru început integrala:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left|TF_x^{STFT}(t, \omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left|F\{x(\tau)\, w(\tau - t)\}\right|^2 (\omega)\, d\omega$$

Aplicând relația lui Parseval se obține:

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(\tau)\, w(\tau - t)\right|^2 d\tau = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(\tau)\right|^2 \left|w(\tau - t)\right|^2 d\tau \tag{27}$$

Cu notațiile:

$$\left|x(\tau)\right|^2 = f(\tau) \text{ şi } \left|w(\tau - t)\right|^2 = g(\tau - t)$$

ultima relație devine:

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(\tau - t)\, d\tau = 2\pi \left(f(t) * g^{\vee}(t)\right)$$

De aceea:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|TF_x^{STFT}(t, \omega)\right|^2 d\omega\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * g^{\vee}(t)\, dt = 2\pi F\left\{f(t) * g^{\vee}(t)\right\}(0) = \\ = 2\pi F\left\{f(t)\right\}(0)\, F\left\{g^{\vee}(t)\right\}(0) \tag{28}$$

Dar:

$$F\left\{f(t)\right\}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = E_x$$

şi:

$$F\left\{g^{\vee}(t)\right\}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|w^{\vee}(t)\right|^2 dt = \left\|w^{\vee}(t)\right\|_{L^2}^2 = \left\|w(t)\right\|_{L^2}^2 = 1$$

În consecință:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|TF_x^{STFT}(t, \omega)\right|^2 dt\, d\omega = 2\pi E_x$$

Relația (26) este demonstrată.

De fapt şi funcția $\left|\mathrm{TF}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right|^2$ este o reprezentare timp-frecvență. Ea poartă numele de spectrogramă. Pe baza observației R2 se poate afirma că spectrograma are proprietatea P1, adică se poate spune că această reprezentare timp-frecvență este o densitate spectro-temporală de energie.

În continuare vom utiliza pentru spectrogramă următoarea notație:

$$\mathrm{TF}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{S}}(t,\,\omega) \;=\; \left|\mathrm{TF}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right|^2 \tag{29}$$

Trebuie remarcat că spectrograma nu mai are proprietatea de liniaritate (R1). În schimb profitând de liniaritatea reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă poate fi scrisă relația:

$$(\forall)\,\mathrm{x}_1(\mathrm{t}) \in L^2(\mathrm{R}) \text{ şi } \mathrm{x}_2(\mathrm{t}) \in L^2(\mathrm{R}) \text{ şi } (\forall)\alpha,\,\beta \in \mathrm{C}$$

$$\mathrm{TF}_{\alpha\mathrm{x}_1+\beta\mathrm{x}_2}^{\mathrm{S}}(t,\,\omega) \;=\; \left|\mathrm{TF}_{\alpha\mathrm{x}_1+\beta\mathrm{x}_2}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right|^2 = \left|\alpha\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega) \;+\; \beta\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right|^2 =$$

$$= \left(\alpha\cdot\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega) \;+\; \beta\cdot\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right)\left(\alpha\cdot\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega) \;+\; \beta\cdot\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right)^* =$$

$$= |\alpha|^2\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{S}}(t,\,\omega) \;+\; |\beta|^2\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{S}}(t,\,\omega) \;+\; \alpha\beta^*\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\left(\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right)^* \;+$$

$$+\; \alpha^*\beta\left(\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right)^*\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega) \;=\; |\alpha|^2\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{S}}(t,\,\omega) \;+\; |\beta|^2\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{S}}(t,\,\omega) \;+$$

$$+\; 2Re\left\{\alpha\beta^*\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\left(\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right)^*\right\}$$

S-a demonstrat în acest fel că:

$$\mathrm{TF}_{\alpha\cdot\mathrm{x}_1+\beta\cdot\mathrm{x}_2}^{\mathrm{S}}(t,\,\omega) \;=$$

$$= |\alpha|^2\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{S}}(t,\,\omega) + |\beta|^2\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{S}}(t,\,\omega) + 2Re\left\{\alpha\beta^*\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\left(\mathrm{TF}_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right)^*\right\} \tag{30}$$

Proprietatea exprimată de relația (30) se numeşte biliniaritate.
De fapt o transformare T este numită biliniară dacă satisface relația:

$$\mathrm{T}\left\{\alpha x_1+\beta x_2,\;\alpha x_1+\;\beta x_2\right\} \;=\; |\alpha|^2\mathrm{T}\left\{x_1,x_1\right\} \;+\; |\beta|^2\mathrm{T}\left\{x_2,x_2\right\} \;+$$
$$+\; \alpha\beta^*\mathrm{T}\left\{x_1,x_2\right\} \;+\; \alpha^*\beta\;\mathrm{T}\left\{x_2,x_1\right\} \tag{30'}$$

În cazul spectrogramei:

$$T\left\{x_1,x_2\right\}(t,\,\omega) \;=\; TF_{x_1}^{STFT}(t,\,\omega)\left(TF_{x_2}^{STFT}(t,\,\omega)\right)^{*}$$

adică:

$$T\left\{x_1,x_1\right\}(t,\,\omega) \;=\; TF_{x_1}^{S}(t,\,\omega)$$

Ținând seama de această observație se constată identitatea relațiilor (30) şi (30').

Deci spectrograma este o reprezentare timp-frecvență biliniară. Cel de-al treilea termen din relația (30) este numit termen de interferență. El exprimă modul în care se influențează reprezentările timp-frecvență ale componentelor $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ în structura reprezentării timp-frecvență a semnalului $\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)$. Evident el deranjează "lizibilitatea" spectrogramei semnalului $\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)$.

În continuare se verifică dacă reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă sau spectrograma prezintă proprietăți "marginale" utile. Cu alte cuvinte se verifică dacă proprietatea P2 din paragraful 1.2, este sau nu verificată de către aceste reprezentări timp-frecvență. În acest scop trebuie estimate integralele:

$$I_1 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{STFT}(t,\,\omega)\,d\omega\,; \quad I_2 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{STFT}(t,\,\omega)\,dt\,;$$

$$I_3 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{S}(t,\,\omega)\,d\omega \quad ; \quad I_4 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{S}(t,\,\omega)\,dt\,;$$

Integrala I_1 a fost calculată în relația (25). Întrucât:

$$2\pi\, x(0)\, w^{\vee}(t) \;\neq\; |x(t)|^2$$

rezultă că reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă nu are comportări "marginale" utile (nu verifică proprietatea P2). La aceeaşi concluzie s-ar fi ajuns şi calculând integrala I_2. Integrala I_3 a fost calculată în relația (27). Deoarece:

$$2\pi\left(|x(t)|^2 \,*\, |w^{\vee}(t)|^2\right) \;\neq\; |x(t)|^2$$

se poate afirma că nici spectrograma nu verifică proprietatea P2.

Analizând proprietatea P3 din paragraful 1.2 se constată că nici aceasta nu este verificată de reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă

($TF_x^{STFT}(t,\omega) \in C$). În schimb se poate afirma că această proprietate este verificată de spectrogramă. În continuare se verifică cauzalitatea celor două reprezentări timp-frecvență care reprezintă subiectul acestui paragraf. Prima dintre ele, reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă, se poate exprima pe baza convoluției dintre semnalele $u(t)$ și $w^{\vee}(t)$ (relația (23)). Deci ea poate fi privită ca răspuns al sistemului cu răspunsul la impuls $w^{\vee}(t)$ la semnalul $u(t)$. Dar acest sistem nu este unul cazual. În consecință se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă nu este cauzală. Din acest motiv rezultă că nici spectrograma nu este cauzală. În consecință nici una dintre reprezentările timp-frecvență descrise în acest paragraf nu are proprietatea P4 din paragraful 1.2. În continuare se analizează inversabilitatea celor două reprezentări timp-frecvență (proprietatea P5 din paragraful 1.2). Conform proprietății următoare reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă este inversabilă:

P5. $$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{TF}_x^{\mathrm{STFT}}(\tau, \omega)\, w(\tau - t)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega\, d\tau \qquad (31)$$

Nu acelaşi lucru se poate afirma însă şi despre spectrogramă. Într-adevăr, pot exista două semnale $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ distincte pentru care:

$$\left|\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{STFT}}(t, \omega)\right| \equiv \left|\mathrm{TF}_{x_2}^{\mathrm{STFT}}(t, \omega)\right|$$

adică:

$$\mathrm{TF}_{x_1}^{S}(t, \omega) \equiv \mathrm{TF}_{x_2}^{S}(t, \omega)$$

Dacă spectrograma ar fi descrisă de un operator inversabil, atunci ultima relație ar implica identitatea semnalelor $x_1(t)$ şi $x_2(t)$. În concluzie spectrograma nu are proprietatea P5 din paragraful 1.2.

Se analizează în continuare modul în care reacționează cele două reprezentări timp-frecvență care constituie subiectul acestui paragraf la translații în planul timp-frecvență. Se consideră în acest scop semnalul $x_{t_o,\omega_o}(t)$ definit în enunțul proprietății P6 din paragraful 1.1. Se stabileşte legătura între reprezentările timp-frecvență ale semnalelor $x_{t_o,\omega_o}(t)$ şi $x(t)$.

$$\mathrm{TF}_{x_{t_o,\omega_o}}^{\mathrm{STFT}}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_o)\, e^{j\omega_o\tau}\, w(\tau - t)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$\tau - t_o = u$$

se obține:

$$\mathrm{TF}^{\mathrm{STFT}}_{x_{t_o,\omega_o}}(t,\,\omega) = e^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_o)t_o}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\; w\left(u-\left(t-t_o\right)\right) e^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_o)u}\,du$$

Legătura căutată este deci:

$$\mathrm{TF}^{\mathrm{STFT}}_{x_{t_o,\omega_o}}(t,\,\omega) = e^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_o)t_o}\mathrm{TF}^{\mathrm{STFT}}_{x}\left(t-t_o,\,\omega-\omega_o\right) \tag{32}$$

Deci relația (11) (care descrie proprietatea P6 din paragraful (1.1) nu este satisfăcută stricto-senso. Ea este totuşi verificată cu excepția unui factor de proporționalitate de modul unitar. Luând modulul în cei doi membrii ai relației (32) şi ridicând la pătrat se obține:

$$_1\mathrm{P6.}\qquad \mathrm{TF}^{\mathrm{S}}_{x_{t_o,\omega_o}}(t,\,\omega) = \mathrm{TF}^{\mathrm{S}}_{x}\left(t-t_o,\,\omega-\omega_o\right) \tag{33}$$

Cu alte cuvinte spectrograma este invariantă la translații în planul timp-frecvență.

Se analizează în continuare modul în care reacționează reprezentările timp-frecvență care constituie subiectul acestui paragraf la dilatare, convoluție şi modulație în domeniul timp. Se constată că nici transformarea Fourier scurtă, nici spectrograma nu au proprietățile P7 şi P8 din paragraful 1.2, iar proprietatea P9 o are doar spectrograma [59]. Referitor la proprietatea P10, se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă nu verifică formula lui Moyal. În schimb poate fi demonstrată o formulă de tipul:

$$_1\mathrm{P10.}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{TF}^{\mathrm{STFT}}_{x}(t,\,\omega)\left(\mathrm{TF}^{\mathrm{STFT}}_{y}(t,\,\omega)\right)^{*}\,dt\,d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y^{*}(t)\,dt \tag{34}$$

Se constată că în cazul particular când semnele *x* şi *y* sunt identice relația (34) se transformă în relația (26). Relația (34) poate fi pusă şi în forma:

$$\left\langle \mathrm{TF}^{STFT}_{x}(\mathrm{t},\omega),\,\mathrm{TF}^{STFT}_{y}(\mathrm{t},\omega)\right\rangle_{L^2\left(\mathrm{R}^2\right)} = 2\pi\left\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\right\rangle_{L^2\left(\mathrm{R}^2\right)} \tag{34'}$$

Deci izometria până la constanta de proporționalitate 2π, dintre spațiile $L^2\left(\mathrm{R}^2\right)$ şi $L^2(\mathrm{R})$, introdusă de transformarea Fourier scurtă conservă produsul scalar.

Nici spectograma nu verifică formula lui Moyal.

În continuare se verifică proprietățile utile pentru analiza nestaționarităților din semnalul de analizat, prezentate în paragraful 1.1.

Se consideră în acest scop semnalul:

$$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_o)$$

Suportul său temporal este intervalul $[0, t_o)$. Transformata sa Fourier scurtă se poate exprima, conform relației (23), în forma:

$$TF_x^{STFT}(t, \omega) = x(t)\, e^{-j\omega t} * w^{\vee}(t)$$

Proprietăți	Reprezentarea timp frecvență		Observații
	Fourier scurtă TF^{STFT}	Spectogramă TF^{S}	
Liniaritate	Da	Nu	${}_1R_1$
Biliniaritate	Nu	Da	
Densitate spectro-temporală de energie	Nu	Da	${}_1R_2$
Marginale (P2)	Nu	Nu	
Pozitivitate (P3)	Nu	Da	
Cauzalitate (P4)	Nu	Nu	
Inversabilitate (P5)	Da	Nu	${}_1P_5$
Invarianță la translație (P6)	Nu	Da	${}_1P_6$
Invarianță la scalare (P7)	Nu	Nu	
Convoluție (P8)	Nu	Nu	
Modulație (P9)	Nu	Da	
Unitaritate (P10)	Nu	Nu	${}_1P_{10}$
Conservarea suporturilor (P11)	Nu	Nu	
Identif. staționar. (P12)	Nu	Nu	
Concentrare pe legea frecvenței instantanee (P13)	Nu	Nu	

Tabelul 2.2.1 Proprietățile reprezentărilor timp-frecvență de tip transformare Fourier scurtă şi spectogramă.

Chiar dacă suportul ferestrei temporale este limitat, suportul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă va avea o lungime mai mare decât lungimea intervalului $[0, t_o]$. În consecință se poate afirma că proprietatea P11, din

paragraful 1.1, nu este verificată de către reprezentările timp-frecvență care reprezintă subiectul acestui paragraf.

Nici proprietatea de identificare a semnalelor staționare, P12, nu este verificată de către reprezentările timp-frecvență de tip transformare Fourier scurtă, respectiv spectrogramă. De asemenea se poate afirma că aceste reprezentări timp-frecvență nu se concentrează "perfect" pe legea temporală a frecvenței instantanee a semnalului de analizat, aşa cum pretinde proprietatea P13 din paragraful 1.2.

Rezultatele obținute în acest paragraf sunt sintetizate în tabelul 2.2.1.

2.3 EXEMPLU

În continuare se vor calcula reprezentările timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă, respectiv spectrogramă, pentru un semnal nestaționar determinist de energie finită. Pe acest exemplu vor fi evidențiate proprietățile demonstrate în paragraful precedent.

Se consideră semnalul modulat în amplitudine:

$$x_1(t) = e^{-\frac{\pi}{2}t^2}\cos\omega_o t$$

Se va utiliza fereastra temporală:

$$w(t) = e^{-\frac{\pi}{2}t^2}$$

adică se va calcula transformarea Gabor:

$$\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\tau^2}\cos\omega_o\tau\, e^{-\frac{\pi}{2}(\tau-t)^2} e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Ultima relație poate fi pusă în forma echivalentă:

$$\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\left(\tau^2+(\tau-t)^2\right)}\cos\omega_o\tau\; e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

respectiv în forma:

$$\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega) = e^{-\pi t^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}\tau-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\cos\omega_o\tau\; e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Pentru orice valoare a lui *t*, integrala din membrul drept reprezintă transformarea Fourier a semnalului obținut prin modularea în amplitudine a semnalului purtător $\cos\omega_o\tau$ cu un semnal modulator de tip Gaussian. Se poate deci scrie:

$$\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega) \;=\; e^{-\pi t^2}\; F\left\{e^{-\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}\tau-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\cos\omega_o\tau\right\}(\omega)$$

Aplicând proprietățile transformării Fourier de întârziere în timp, scalare în timp şi modulație se obține:

$$\begin{aligned}\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\omega)=&\frac{1}{2}e^{-\pi t^2}\left[e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{4\pi}}\cos\left(\frac{(\omega+\omega_o)\,t}{2}\right)+e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{4\pi}}\cos\left(\frac{(\omega-\omega_o)\,t}{2}\right)\right]-\\&-j\frac{1}{2}e^{-\pi t^2}\left[e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{4\pi}}\sin\left(\frac{(\omega+\omega_o)\,t}{2}\right)+e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{4\pi}}\sin\left(\frac{(\omega-\omega_o)\,t}{2}\right)\right]\end{aligned} \tag{35}$$

De aceea spectrograma acestui semnal are expresia:

$$\left|\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{STFT}}(t,\omega)\right|^2 \;=\; \frac{1}{4}e^{-\pi\cdot t^2}\left(e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{2\pi}}\;+\;e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{2\pi}}\;+2\,e^{-\frac{\omega^2+\omega_o^2}{2\pi}}\;\cos\omega t\right) \tag{36}$$

Analizând modulul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă se constată că aceasta este rădăcina pătrată a unei sume de trei distribuții Gaussiene. Fiecare este o distribuție mixtă timp-frecvență. În cazul primilor doi termeni variabilele timp şi frecvență sunt separate. În cazul celui de al treilea termen variabilele nu sunt separate, datorită factorului $\cos\omega\, t$. Oricum, din punct de vedere al distribuției în domeniul timp se constată că toți cei trei termeni au maxime în origine ($t=0$) .Ținând seamă de faptul că:

$$-1 \le \cos\omega\, t \le 1$$

rezultă :

$$\begin{aligned}\left(e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{4\pi}}-e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{4\pi}}\right)^2 \le\; & e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{2\pi}}+e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{2\pi}}+2\,e^{-\frac{\omega^2+\omega_o^2}{2\pi}}\cos\omega\, t \le\\ &\le\left(e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{4\pi}}+e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{4\pi}}\right)^2\end{aligned} \tag{37}$$

Având în vedere că primul membru şi ultimul membru al relației de mai sus nu depind de timp şi că aceasta se poate pune în forma:

$$\frac{1}{4}e^{-\pi t^2}\left|e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{4\pi}}-e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{4\pi}}\right| \le \left|TF_x^{STFT}(t,\omega)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi t^2}{2}}\left|-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{4\pi}+e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{4\pi}}\right|$$

rezultă comportamentul Gaussian (dat de factorul $e^{-\frac{\pi t^2}{2}}$) al modulului reprezentării timp-frecvență a semnalului din acest exemplu, în domeniul timp. Acest comportament descrie primul factor din expresia semnalului $x_1(t)$. Comportarea în domeniul frecvență a semnalului este descrisă de radicalul celui de al doilea membru din relația (37). Aceasta este mărginit inferior de funcția:

$$A(\omega) = \left| e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{4\pi}} - e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{4\pi}} \right|$$

şi superior de funcția:

$$B(\omega) = \left| e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{4\pi}} + e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{4\pi}} \right|$$

Cu notațiile:

$$\alpha(\omega) = e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{4\pi}} \quad \text{şi} \quad \beta(\omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{4\pi}}$$

ultimele două relații devin:

$$A(\omega) = |\alpha(\omega) - \beta(\omega)|$$

şi

$$B(\omega) = |\alpha(\omega) + \beta(\omega)|$$

Se constată că funcțiile $\alpha(\omega)$ şi $\beta(\omega)$ sunt Gaussiene, centrate pe pulsațiile $-\omega_o$ şi ω_o. În continuare se consideră că valoarea pulsației ω_o este suficient de mare, astfel încât să aibă loc relația:

$$e^{-\frac{\omega_o^2}{4\pi}} << 1$$

Dacă acestă ipoteză este satisfăcută atunci pot fi făcute aproximațiile:

$$A(\omega) = B(\omega) \cong \alpha(\omega), \quad (\forall)\, \omega \in B_-$$

unde B_- reprezintă un interval de pulsații centrat pe - ω_o, respectiv:

$$A(\omega) = B(\omega) \cong \beta(\omega), \quad (\forall)\, \omega \in B_+$$

în care B_+ reprezintă un interval de pulsații centrat pe ω_o.

În consecință se poate afirma că modulul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă are o comportare în domeniul frecvență descrisă de funcția $\alpha(\omega)$ în intervalul de pulsații B_- şi de funcția $\beta(\omega)$ în intervalul de pulsații B_+. Dar aceste funcții au valori maxime la pulsațiile $-\omega_o$ şi ω_o. În consecință se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă are maxime în planul timp-frecvență poziționate pe dreptele de ecuație: $\omega = \omega_o$ şi $\omega = -\omega_o$. Acest comportament descrie faptul că semnalul $x_1(t)$ este un semnal modulat, pulsația purtătoare fiind ω_o. Este evidențiat în acest mod factorul $\cos\omega_o t$ din expresia semnalului $x_1(t)$.

Deoarece, pulsația instantanee a semnalului $x_1(t)$ este ω_o, se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Gabor a acestui semnal se concentrează pe legea pulsației sale instantanee. Această concentrare este specifică unor funcții Gaussiene şi nu satisface exigențele proprietății P13. Având în vedere faptul că orice reprezentare timp-frecvență, fiind o funcție de două variabile, poate fi considerată ca fiind o imagine, rezultă că pentru creşterea concentrării sale pe legea de variație a frecvenței instantanee, pot fi folosite tehnicile de detecție de maxim din prelucrarea imaginilor. Utilizând aceste tehnici reprezentarea timp-frecvență considerată poate fi transformată într-o altă imagine care să descrie o nouă reprezentare timp-frecvență. Aceasta va satisface exigențele proprietății P13. În acelaşi mod poate fi prelucrată o reprezentare timp-frecvență pentru a se obține o nouă reprezentare bidimensională care să satisfacă oricare dintre proprietățile enunțate în capitolul precedent. Practic este vorba despre o filtrare în planul timp-frecvență. Evident filtrul bidimensional folosit poate fi liniar sau nu. Aceste tehnici de filtrare în planul timp-frecvență sunt prezentate pe larg în [59]. Alte exemple de reprezentări timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă respectiv spectrogramă vor fi prezentate în capitolele următoare. Este vorba în special de capitolul 8 dedicat programelor de calcul ale reprezentărilor timp frecvență. Aşa cum

se va vedea majoritatea programelor concepute pentru calculul acestor reprezentări au facilitatea de a calcula şi reprezentarea de tipul transformare Fourier scurtă.

Deşi a fost una dintre primele reprezentări timp frecvență introduse totuşi există numeroase aplicații practice ale reprezentării timp frecvență de tipul transformare Fourier scurtă. Ultimul capitol al acestei cărți va evidenția câteva dintre aceste aplicații. Explicația rezidă în asemănarea dintre transformarea Fourier scurtă şi transformarea Fourier tradițională. De accea este uşor de modificat un algoritm de prelucrare a semnalelor staționare bazat pe utilizarea transformării Fourier într-un algoritm de prelucrare a semnalelor nestaționare bazat pe utilizarea transformării Fourier scurte.

Capitolul 3

REPREZENTAREA TIMP-FRECVENȚĂ DE TIPUL "FUNCȚIE DE INCERTITUDINE "

Unul dintre dezavantajele reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă este numărul redus de proprietăți utile ale acestei reprezentări.
O cauză este aceea că fereastra temporală folosită este o funcție care descrie un semnal staționar. În consecință fereastra temporală nu se poate adapta la nestaționaritățile semnalului de analizat. Pentru a putea face această adaptare ar fi necesar ca fereastra temporală să depindă de semnalul de analizat. În acest mod se pot obține noi reprezentări timp-frecvență, care se diferențiază prin legea care exprimă legătura dintre fereastra temporală şi semnalul de analizat. Una dintre acestea este şi reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine. Această reprezentare este definită de relația:

$$\mathrm{TF}_x^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{\,j\,\omega\,\tau}\, d\tau$$

Dacă în integrala din membrul drept se face schimbarea de variabilă:

$$\tau + \frac{t}{2} \;=\; u$$

se obține:

$$\mathrm{TF}_x^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\,(u)\,x^*(u - t)\, e^{\,j\,\omega\left(u-\frac{t}{2}\right)}\, du \;=$$

$$= e^{-j\,\omega\,\frac{t}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x^*(u)\,x^{\vee}(t - u)\, e^{-j\,\omega\,u}\, du\right]^* \;=\; e^{-j\,\omega\,\frac{t}{2}}\left(\mathrm{TF}_{x^*}^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)\right)^* \qquad (38)$$

În consecință se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este o reprezentare timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă, cu fereastra temporală:

$$w(\tau) \;=\; x(\tau)$$

3.1. EXPRIMĂRI ALTERNATIVE ALE FUNCȚIEI DE INCERTITUDINE

În relația (37), reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este exprimată ca şi o integrală a produsului dintre variantele avansată şi întârziată ale

semnalului de analizat. În continuare se prezintă o exprimare alternativă a acestei reprezentări timp-frecvență bazată pe transformarea Fourier a semnalului $x(t)$, $X(\omega)$. În acest scop se constată faptul că:

$$\mathrm{TF}_x^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega) \;=\; F\left\{x\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right)\right\}(-\,\omega)\,, \quad (\forall)\; t \in R$$

Deci pentru fiecare număr real t, reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine poate fi exprimată ca şi o transformare Fourier. De aceea, folosind proprietatea de înmulțire în timp a transformării Fourier, ultima relație se mai poate scrie sub forma:

$$\mathrm{TF}_x^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega) \;=\; \frac{1}{2\pi}\left[F\left\{x\left(\tau + \frac{t}{2}\right)\right\}(-\omega) * F\left\{x^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right)\right\}(-\,\omega)\right] \qquad (39)$$

Folosind proprietatea de translație în timp a semnalului $x(t)$ se poate scrie:

$$F\left\{x\left(\tau + \frac{t}{2}\right)\right\}(-\,\omega) \;=\; e^{-\mathrm{j}\,\omega\,\frac{t}{2}} X(-\,\omega)$$

şi:

$$F\left\{x^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right)\right\}(-\,\omega) \;=\; e^{\mathrm{j}\,\omega\,\frac{t}{2}} X^*(\,\omega)$$

De aceea relația (39) devine:

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}_x^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[e^{-\mathrm{j}\,\omega\,\frac{t}{2}} X(-\,\omega) * e^{\mathrm{j}\,\omega\,\frac{t}{2}} X^*(\omega)\right] = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\,u\,\frac{t}{2}} X(-\,u)\, e^{\mathrm{j}\,(\omega-u)\,\frac{t}{2}} X^*(\omega - u)\, du \;= \\
&= \frac{e^{\mathrm{j}\,\omega\,\frac{t}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(-\,u)\, X^*(\omega - u)\; e^{-jut}\, du
\end{aligned}$$

Efectuând în ultima integrală schimbarea de variabilă:

$$\omega - u = \frac{\omega}{2} + v$$

se obține:

$$TF_x^{FI}(t, \omega) = \frac{e^{j\omega\frac{t}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X\left(v - \frac{\omega}{2}\right) X^*\left(v + \frac{\omega}{2}\right) e^{j\left(v-\frac{\omega}{2}\right)t} dv$$

sau:

$$TF_x^{FI}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X\left(v - \frac{\omega}{2}\right) X^*\left(v + \frac{\omega}{2}\right) e^{jvt} dv \qquad (40)$$

Aceasta este o formulă alternativă celei din relația (37) pentru calculul reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine.

Această reprezentare timp-frecvență a fost utilizată pentru prima dată în radiolocație. În continuare se explică semnificația fizică a reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine, în legătură cu problema de bază a radiolocației. Se consideră că radiolocatorul emite unda electromagnetică $s(t)$. În urma reflectării acesteia pe suprafața avionului şi a întoarcerii sale se recepționează unda $s_r(t)$. Legătura între aceste semnale este:

$$s_r(t) = s(t - t_o)\, e^{j\Delta\omega(t-t_o)} \qquad (41)$$

Pe baza măsurării întârzierii t_o se poate determina distanța dintre țintă şi radiolocator. Pe baza măsurării deviației de frecvență $\Delta\omega$ se poate măsura valoarea vitezei instantanee a țintei. Spectrul semnalului $s_r(t)$ este:

$$S_r(\omega) = e^{-j\omega t_o} S(\omega - \Delta\omega) \qquad (42)$$

Filtrul adaptat la semnalul $s(t)$ are răspunsul în frecvență, [130]:

$$H_a(\omega) = k \cdot e^{-j\omega t_i} \cdot S^*(\omega)$$

unde t_i reprezintă momentul la care are loc maximizarea raportului semnal pe zgomot la ieşirea acestui sistem.

Pentru: $t_i = 0$ ultima relație devine:

$$H_o(\omega) = k S^*(\omega)$$

Răspunsul acestui filtru la semnalul recepționat, $s_r(t)$ este:

$$y(t, t_o, \Delta\omega) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\omega)\, S(\omega - \Delta\omega)\, e^{j\omega(t-t_o)}\, d\omega$$

Cu notația:

$$t - t_o = \tau$$

şi schimbarea de variabilă:

$$\omega - \frac{\Delta\omega}{2} = u$$

ultima relație devine:

$$y(\tau, \Delta\omega) = \frac{k}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S^*\left(u + \frac{\Delta\omega}{2}\right) S\left(u - \frac{\Delta\omega}{2}\right) e^{ju\tau}\, du \right] e^{j\frac{\Delta\omega}{2}\tau}$$

Făcând abstracție de factorul de modul unitar $e^{j\frac{\Delta\omega}{2}\tau}$ şi considerând pentru constanta *k* valoarea 1, ultima relație devine:

$$y_1(\tau, \Delta\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) S\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right) e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

Dar:

$$S^*\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t')\, e^{j\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t'}\, dt'$$

şi deci:

$$y_1(\tau, \Delta\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t')\, e^{j\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t'} S\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right) e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

Cu schimbarea de variabilă:

$$\omega - \frac{\Delta\omega}{2} = \omega'$$

şi cu observația:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega')\, e^{j\omega'(t' + \tau)}\, d\omega' = s(\tau + t')$$

ultima relație devine:

$$y_1(\tau, \Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t')\, s(\tau + t')\, e^{j\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau + \Delta\omega t'\right)}\, dt'$$

sau cu schimbarea de variabilă:

$$t = t' + \frac{\tau}{2}$$

$$y_1(\tau, \Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{j\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau + \Delta\omega t - \frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)}\, dt$$

Aşadar:

$$y_1(\tau, \Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{j\Delta\omega t}\, dt \qquad (43)$$

Deci modulul răspunsului filtrului adaptat la semnalul emis $s(t)$, pentru semnalul recepționat $s_r(t)$, este egal cu modulul reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine a semnalului emis. Iată semnificația fizică a reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine. În continuare se arată cum poate fi utilizată reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine la măsurarea mărimilor t_o şi $\Delta\omega$. În acest scop se stabileşte legătura dintre reprezentările timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine ale semnalelor, emis $s(t)$ şi recepționat $s_r(t)$.

Reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine a semnalului recepționat este:

$$TF_{s_r}^{FI}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_r\left(\tau + \frac{t}{2}\right) s_r^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{j\omega\tau}\, d\tau$$

Ținând seama de relația (41), ultima relație devine:

$$TF_{s_r}^{FI}(t,\ \omega) = e^{j\Delta\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\tau - t_o + \frac{t}{2}\right) s^*\left(\tau - t_o - \frac{t}{2}\right) e^{j\omega\tau}\, d\tau$$

sau, cu schimbare de variabilă:

$$\tau - t_o = u$$

se poate scrie:

$$TF_{s_r}^{FI}(t,\ \omega) = e^{j\left(\Delta\omega t + \omega t_o\right)}\, TF_s^{FI}(t,\ \omega) \qquad (44)$$

Având în vedere că semnalul emis $s(t)$ este cunoscut, reprezentarea sa timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine poate fi calculată. Ea se consideră deci cunoscută. Prin înregistrarea semnalului recepționat $s_r(t)$ și prin calculul reprezentării sale timp-frecvență poate fi determinată exponențiala complexă $e^{j\left(\Delta\omega t + \omega t_o\right)}$. Particularizând relația (44) la $\omega = 0$ se obține:

$$TF_{s_r}^{FI}(t,\ 0) = e^{j\Delta\omega t}\, TF_s^{FI}(t,\ 0) \qquad (45)$$

Se determină semnificația fizică a reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine a semnalului emis la $\omega = 0$:

$$TF_s^{FI}(t,\ 0) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\tau + \frac{t}{2}\right) s^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) d\tau = r_{s\,s}^*(t) \qquad (46)$$

Deci proiecția reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine pe planul $(A, t, 0)$ reprezintă autocorelația semnalului analizat.

În consecință relația (45) se mai scrie:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left\{TF_{s_r}^{FI}(t,\ 0)\right\} = \mathrm{Re}\left\{r_{s\,s}^{*}(t)\right\}\cos\Delta\omega t - \mathrm{I_m}\left\{r_{s\,s}^{*}(t)\right\}\sin\Delta\omega t \\ \mathrm{I_m}\left\{TF_{s_r}^{FI}(t,\ 0)\right\} = \mathrm{Re}\left\{r_{s\,s}^{*}(t)\right\}\sin\Delta\omega t + \mathrm{I_m}\left\{r_{s\,s}^{*}(t)\right\}\cos\Delta\omega t \end{cases}$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații pot fi determinate funcțiile $\cos\Delta\omega t$ şi $\sin\Delta\omega t$ şi deci mărimea $\Delta\omega$.Particularizând relația (44) la $t = 0$, se obține:

$$TF_{s_r}^{FI}(0,\ \omega) = e^{j\,\omega t_o}\ TF_s^{FI}(0,\ \omega) \tag{47}$$

Dar:

$$TF_s^{FI}(0,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2\ e^{j\,\omega\tau}\ d\omega \tag{48}$$

funcție care poate fi determinată având în vedere că semnalul emis este cunoscut. Deoarece $|s(\tau)|^2$ este o funcție reală şi pară, rezultă (pe baza relației (48)) că funcția $TF_s^{FI}(0,\omega)$ este o funcție reală. Relația (47) conduce la sistemul:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left\{TF_{s_r}^{FI}(0,\ \omega)\right\} = \cos\omega t_o\ \ TF_s^{FI}(0,\ \omega) \\ I_m\left\{TF_{s_r}^{FI}(0,\ \omega)\right\} = \sin\omega t_o\ \ TF_s^{FI}(0,\ \omega) \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem pentru orice valoare a pulsației ω se obțin funcțiile $\sin\omega t_o$ şi $\cos\omega t_o$ şi cu ajutorul lor valoarea întârzierii t_o. Se constată că impreciziile de calcul respectiv măsurare a reprezentărilor timp-frecvență $TF_s^{FI}(t,\ \omega)$, $TF_{s_r}^{FI}(t,\ \omega)$ sunt cauza impreciziilor de determinare ale mărimilor t_o şi $\Delta\omega$. Deci incertitudinea asupra valorilor acestor reprezentări timp-frecvență determină incertitudinea asupra valorilor t_o şi $\Delta\omega$. Iată de ce aceste reprezentări timp-frecvență sunt numite de tipul funcție de incertitudine. În încheierea acestui paragraf trebuie specificat că la fel ca şi în cazul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă şi reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine poate fi exprimată ca şi transformare Fourier a unui nucleu. În cazul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă expresia nucleului era:

$$K_{STFT}(\tau, t) = x(\tau)\, w(\tau - t) \tag{49}$$

În cazul reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este valabilă relația:

$$TF_x^{FI}(t, -\omega) = F\left\{x\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right)\right\} \tag{50}$$

şi deci expresia nucleului este:

$$K_{FI}(\tau, t) = x\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \tag{51}$$

3.2 PROPRIETĂȚILE REPREZENTĂRII TIMP-FRECVENȚĂ DE TIPUL FUNCȚIE DE INCERTITUDINE

În continuare se investighează proprietățile reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine (RTFFI). Pentru început se verifică dacă această reprezentare este liniară sau biliniară. În acest scop se consideră semnalele de energie finită $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ cu reprezentările timp-frecvență $TF_{x_1}^{FI}(t, \omega)$ şi $TF_{x_2}^{FI}(t, \omega)$ şi constantele complexe α şi β. Se calculează reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine a semnalului $\alpha x_1 + \beta x_2$.

$$TF_{\alpha x_1 + \beta x_2}^{FI}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha x_1\left(\tau + \frac{t}{2}\right) + \beta x_2\left(\tau + \frac{t}{2}\right)\right]\left[\alpha x_1\left(\tau - \frac{t}{2}\right) + \beta x_2\left(\tau - \frac{t}{2}\right)\right]^* e^{j\omega\tau} d\tau$$

$$= |\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x_1\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x_1^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\tau + |\beta|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x_2^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\tau +$$

$$+ \alpha\beta^* \int_{-\infty}^{\infty} x_1\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x_2^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\tau + \alpha^*\beta \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) x_2\left(\tau + \frac{t}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\tau$$

E clar că reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine nu este liniară. Cu notația:

$$TF_{x_1 x_2}^{FI}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x_2^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{j\omega t} d\tau \tag{52}$$

ultima relație devine:

$$TF_{\alpha x_1 + \beta x_2}^{FI}(t,\ \omega) = |\alpha|^2 TF_{x_1}^{FI}(t,\ \omega) + |\beta|^2 TF_{x_2}^{FI}(t,\ \omega) + \alpha\beta^* TF_{x_1 x_2}^{FI}(t,\ \omega) + \\ + \alpha^*\beta\, TF_{x_2 x_1}^{FI}(t,\ \omega) \tag{53}$$

Se contată identitatea relațiilor (30') şi (53) dacă:

$$T\{x_1,\ x_2\}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x_2^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{j\omega t} d\tau$$

Se poate deci afirma că:

${}_2R_1$. Reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este biliniară.

Ținând seama de simetria prezentă în definiția reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine poate fi formulată o altă proprietate a acestei reprezentări. În acest scop se calculează:

$$TF_x^{FI}(-t,\ -\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau - \frac{t}{2}\right) x^*\left(\tau + \frac{t}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Trecând în ambii membrii la conjugata complexă se obține:

$$TF_x^{FI\ *}(-t,\ -\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\tau = TF_x^{FI}(t,\ \omega) \tag{54}$$

În acest mod s-a demonstrat că:

${}_2R_2$. Reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este o funcție complexă conjugat simetrică.

În continuare se studiază modul în care reacționează reprezentarea de tipul funcție de incertitudine la translații în planul timp-frecvență. Pentru început se studiază reacția la translații în timp.

În acest scop se consideră semnalul $x(t)$ cu reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine $\mathrm{TF}_x^{\mathrm{FI}}(t,\ \omega)$. Fie:

$$x_1(t) = x(t - t_o)$$

Se calculează reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine a semnalului $x_1(t)$:

$$\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{FI}}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x_1^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{\mathrm{j}\omega\tau} d\tau$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$\tau - t_0 = u$$

se obține:

$$\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{FI}}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(u + \frac{t}{2}\right) x^*\left(u - \frac{t}{2}\right) e^{\mathrm{j}\omega(u + t_o)} du$$

În consecință:

$$\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{FI}}(t,\ \omega) = e^{-\mathrm{j}\,\omega\,t_o} \cdot \mathrm{TF}_x^{\mathrm{FI}}(t,\ \omega) \qquad (55)$$

Unei translații în domeniul timp îi corespunde înmulțirea cu o exponențială complexă (comportare specifică transformatei Fourier). Se constată că:

$$\mathrm{TF}_{x_1}^{\mathrm{FI}}(t,\ \omega) \neq \mathrm{TF}_x^{\mathrm{FI}}(t - t_o,\ \omega)$$

Deci reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine nu are proprietatea P5 din paragraful 1.2.

În continuare se studiază modul în care această reprezentare timp-frecvență reacționează la translații în domeniul frecvență. Fie în acest scop semnalul:

$$x_2(t) = x(t)\, e^{\mathrm{j}\,\omega_o\,t}$$

Reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine a acestui semnal este:

$$\mathrm{TF}_{x_2}^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_2\left(\tau+\frac{t}{2}\right)x_2^{*}\left(\tau-\frac{t}{2}\right)e^{\mathrm{j}\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\tau+\frac{t}{2}\right)x^{*}\left(\tau-\frac{t}{2}\right)e^{\mathrm{j}\omega_o t}e^{\mathrm{j}\omega\tau}d\tau$$

Deci:

$$\mathrm{TF}_{x_2}^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega)\;=\;e^{\mathrm{j}\,\omega_o\,t}\cdot\;\mathrm{TF}_{x}^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega) \tag{56}$$

Reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este invariantă la înmulțirea cu exponențiale complexe în domeniul timp. Deoarece:

$$\mathrm{TF}_{x_2}^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega)\;\neq\;\mathrm{TF}_{x}^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega-\,\omega_o)$$

rezultă că această reprezentare timp-frecvență nu este invariantă nici la translații în domeniul frecvență. Reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine a semnalului:

$$x_{t_o,\omega_o}(t)\;=\;x\left(t-\,t_o\right)e^{\mathrm{j}\,\omega_o t}$$

este legată de reprezentarea timp-frecvență de acelaşi tip a semnalului $x(t)$, pe baza proprietăților de mai sus (relațiile (55) şi (56)) prin formula:

$$\mathrm{TF}_{x_{t_o,\omega_o}}^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega)\;=\;e^{\mathrm{j}\,\omega_o t}\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t_o}\;\mathrm{TF}_{x}^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega) \tag{57}$$

Deşi nu este invariantă la translații în planul timp-frecvență, totuşi reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine pune bine în evidență valorile constantelor ω_o şi t_o. Această proprietate o face foarte utilă.

În continuare se studiază proprietățile marginale ale reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine. În acest scop se calculează:

$$\mathrm{I}_{\omega}\;=\;\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{TF}_{x}^{\mathrm{FI}}(t,\,\omega)\,d\omega$$

Se mai poate scrie:

$$\mathrm{I}_{\omega}\;=\;\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\tau\;+\;\frac{t}{2}\right)x^{*}\left(\tau\;-\;\frac{t}{2}\right)\;\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}\,\omega\tau}\;d\omega\,d\tau$$

Dar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \;=\; F\,\{1(\omega)\}\,(\tau) \;=\; 2\pi\,\delta\,(\tau)$$

În consecință:

$$I_{\omega} \;=\; 2\pi\, x\left(\frac{t}{2}\right) x^{*}\left(-\frac{t}{2}\right) \;\neq\; \left|x(t)\right|^{2}$$

Deci nici proprietatea P2 din paragraful 1.2 nu este satisfăcută. Totuşi reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine are o proprietate marginală interesantă în domeniul frecvență. Pentru a evidenția această proprietate se calculează:

$$TF_x^{FI}(t,\, 0) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x^{*}\left(\tau - \frac{t}{2}\right)\, d\tau$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$u \;=\; \tau - \frac{t}{2}$$

ultima relație devine:

$$TF_x^{FI}(t,\, 0) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x^{*}(u)\, x\,(u + t)\; du \;=\; r_{xx}^{*}(t) \qquad (58)$$

Deci proiecția reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine pe planul amplitudine-timp reprezintă autocorelația semnalului de analizat. În consecință valoarea în origine a reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine a semnalului $x(t)$ este tocmai energia acestui semnal:

$$TF_x^{FI}(0,\, 0) \;=\; E_x \qquad (59)$$

Pentru a vedea comportarea marginală a reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine, în domeniul timp se calculează:

$$I_t = \int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{FI}(t, \omega)\, dt$$

Ținând seama de formula din relația (40), integrala I_t devine:

$$I_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X\left(v - \frac{\omega}{2}\right) X^*\left(v + \frac{\omega}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j v t}\, dt\, dv$$

Dar:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j v t}\, dt = F^{-1}\{1(t)\}(\nu) = \delta(v)$$

În consecință:

$$I_t = X\left(-\frac{\omega}{2}\right) X^*\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Se poate afirma că I_t nu reprezintă o densitate spectrală de energie. Proiecția reprezentării timp frecvență de tipul funcție de incertitudine pe planul amplitudine - frecvența are expresia:

$$TF_x^{FI}(0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X\left(v - \frac{\omega}{2}\right) X^*\left(v + \frac{\omega}{2}\right) dv$$

Cu schimbarea de variabilă:

$$v - \frac{\omega}{2} = u$$

ultima relație devine:

$$TF_x^{FI}(0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(u + \omega)\, X(u)\, du = \frac{1}{2\pi} r_{XX}(\omega) \qquad (60)$$

Deci $TF_x^{FI}(0, \omega)$ este proporțională cu autocorelația spectrului semnalului de analizat.

Relațiile (58) şi (60) îndreptățesc afirmația că funcția de incertitudine este o reprezentare timp-frecvență corelativă. Ea nu este o densitate spectrotemporală de energie, deci proprietatea P1, din paragraful 1.2 nu este verificată de această reprezentare timp-frecvență.

Având în vedere că reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este o funcție complexă rezultă că nu este satisfăcută nici proprietatea P3 din paragraful 1.2. Reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine nu este cauzală. Această afirmație rezultă din interpretarea fizică a acestei reprezentări, ca răspuns al unui filtru adaptat, deoarece filtrele adaptate nu sunt întotdeauna şi sisteme cauzale. În consecință nici proprietatea P4 din paragraful 1.2 nu este verificată.

În schimb se poate demonstra că această reprezentare timp-frecvență este inversabilă [123].

În continuare se stabileşte legătura dintre reprezentările timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine ale semnalelor:

$$x_k(t) = \sqrt{k}\, x(k\, t) \quad , \qquad k > 0$$

şi $x(t)$. Avem:

$$TF_{x_k}^{FI}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_k\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x_k^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{j\omega\tau}\, d\tau$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$u = k\,\tau$$

ultima relație devine:

$$TF_{x_k}^{FI}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(u + \frac{k\,t}{2}\right) x^*\left(u - \frac{k\,t}{2}\right) e^{j\omega\frac{u}{k}}\, du = TF_x^{FI}\left(k\,t, \frac{\omega}{k}\right)$$

Deci reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este invariantă la scalare (proprietatea P7 din paragraful 1.2 este satisfăcută).

Reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine are şi proprietatea de filtrare (P8 din paragraful (1.2)), conform [68]:

$$TF_y^{FI}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{FI}(\tau, \omega)\, TF_h^{FI}(t - \tau, \omega)\, d\tau$$

unde:

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{61}$$

Pe baza aceleaşi referințe bibliografice se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine are şi proprietatea de modulație (P9 din paragraful 1.2). Cu alte cuvinte dacă:

$$y(t) = m(t)\ x(t)$$

atunci:

$$\mathrm{TF}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{FI}}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{TF}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{FI}}(t,\ \omega - \xi)\ \mathrm{TF}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{FI}}(t\ ,\ \xi)\ d\xi \tag{62}$$

Formula lui Moyal se exprimă în cazul reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine în forma:

$$\left\langle \mathrm{TF}_{x_1y_1}^{\mathrm{FI}}(t,\ \omega)\ ,\ \mathrm{TF}_{x_2y_2}^{\mathrm{FI}}(t,\ \omega) \right\rangle_{\mathrm{L}^2(R^2)} = \left\langle x_1,\ x_2 \right\rangle_{\mathrm{L}^2(R^2)} \left\langle y_1,\ y_2 \right\rangle_{\mathrm{L}^2(R^2)}^{*} \tag{63}$$

relație care este verificată pentru orice semnale $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y_1(t)$ şi $y_2(t)$ de energie finită [68]. În continuare se investighează în ce măsură reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine conservă suporturile temporal sau frecvențial ale semnalului de analizat. Se consideră, în acest scop că semnalul analizat are suportul intervalul $[t_1, t_2]$. În consecință semnalul $x\left(\tau + \frac{t}{2}\right)$ va fi identic nul în exteriorul intervalului $\left[t_1 - \frac{t}{2},\ t_2 - \frac{t}{2}\right]$ iar semnalul $x^{*}\left(\tau - \frac{t}{2}\right)$ va fi identic nul în exteriorul intervalului $\left[t_1 + \frac{t}{2},\ t_2 + \frac{t}{2}\right]$. De aceea $x\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x^{*}\left(\tau - \frac{t}{2}\right)$ va fi identic nul în exteriorul intervalului $\left[t_1 - t_2,\ t_2 - t_1\right]$. Deci suportul temporal al reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este intervalul $\left[t_1 - t_2,\ t_2 - t_1\right]$. Se poate afirma că proprietatea P11 din paragraful 1.2 nu este verificată. Rezultatul aplicării transformării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este dublarea lățimii suportului temporal al semnalului de analizat.

Considerații similare pot fi făcute şi în legătură cu suportul frecvențial. Se poate demonstra în acelaşi mod că:

$_2R_{11}$

$$X(\omega) = 0, \quad \omega \notin [\omega_1, \omega_2] \Rightarrow TF_x^{FI}(t, \omega) = 0, \quad \omega \notin [\omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_1]$$

În sfârşit, se poate demonstra că nici proprietățile P12 şi P13 din paragraful 1.2 nu sunt verificate de către reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine. Mai trebuie remarcat că reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine poate fi folosită pentru calculul frecvenței instantanee a semnalului $x(t)$, fiind valabilă formula [68]:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi j} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} TF_x^{FI}(\tau, \omega)\Big|_{\tau=0} e^{j\omega t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{FI}(0, \omega) e^{j\omega\tau} d\omega} \tag{64}$$

În finalul acestui paragraf trebuie menționat că prin ridicarea la pătrat a modulului reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine se obține o nouă reprezentare timp-frecvență:

$$TF_x^{SI}(t, \omega) = \left|TF_x^{FI}(t, \omega)\right|^2 \tag{65}$$

numită suprafață de incertitudine.

3.3 EXEMPLU

Se consideră semnalul "chirp":

$$x(t) = C\, e^{-(\alpha + j\beta) t^2}, \quad C \in R \tag{66}$$

Reprezentarea sa timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este:

$$TF_x^{FI}(t,\ \omega)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}\left(C\,e^{-(\alpha+j\beta)\left(\tau+\frac{t}{2}\right)^2}\right)\left(C\,e^{-(\alpha+j\beta)\left(\tau-\frac{t}{2}\right)^2}\right)^{*}e^{j\omega\tau}\,d\tau$$

Aducând integrandul din membrul drept la o formă mai compactă relația de mai sus devine:

$$TF_x^{FI}(t,\ \omega)\ =\ C^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\left(2\tau^2+\frac{t^2}{2}\right)}\,e^{j\left(\omega\,-\,2\beta t\right)\tau}\ d\tau$$

adică:

$$TF_x^{FI}(t,\ \omega)\ =\ C^2\,F\left\{e^{-\alpha\left(2\tau^2+\frac{t^2}{2}\right)}\right\}\left(2\beta t\ -\ \omega\right)$$

sau ținând seama de expresia transformării Fourier a semnalului Gaussian, [99]:

$$TF_x^{FI}(t,\ \omega)\ =\ C^2e^{-\alpha\frac{t^2}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\ e^{-\frac{\left(2\beta t\ -\ \omega\right)^2}{8\alpha}}$$

În final se poate scrie:

$$TF_x^{FI}(t,\ \omega)\ =\ \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\ C^2\,e^{-\left[\frac{\alpha}{2}t^2+\frac{1}{8\alpha}\left(2\beta t\ -\ \omega\right)^2\right]}$$

Semnalul de analizat este complex. Amplitudinea sa instantanee este:

$$C\,e^{-\alpha t^2}$$

iar faza sa instantanee este:

$$\beta\,t^2$$

În consecință pulsația sa instantanee este:

$$\omega_i(t) = 2\beta t$$

Analizând relația (67) se constată că reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine a semnalului "chirp" este o funcție reală pozitivă. Deoarece:

$$TF_x^{FI}(0, 0) = C^2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

rezultă că energia semnalului "chirp" (membrul drept al relației de mai sus) nu depinde de constanta β (cea care descrie modulația de frecvență a semnalului considerat). Autocorelația semnalului de tip "chirp" este:

$$TF_x^{FI}(t, 0) = C^2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\ e^{-\left[\frac{\alpha}{2}t^2 + \frac{\beta^2}{2\alpha}t^2\right]}$$

adică:

$$r_{xx}(t) = C^2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\ e^{-\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta^2}{2\alpha}\right)t^2}$$

Se observă caracterul Gaussian al acestei funcții de autocorelație. Atât suporturile temporal şi frecvențial ale semnalului de tip "chirp" cât şi suporturile temporal şi frecvențial ale reprezentării sale timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine sunt de lungime infinită.

Proiecția reprezentării timp-frecvență considerată pe planul amplitudine-pulsație este:

$$TF_x^{FI}(0, \omega) = C^2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\ e^{-\frac{\omega^2}{8\alpha}}$$

Această formulă confirmă caracterul Gaussian al comportării semnalului "chirp" în domeniul frecvență. În sfârşit, întrucât:

$$e^{-\left[\frac{\alpha}{2}t^2 + \frac{1}{8\alpha}(2\beta t - \omega)^2\right]} \leq 1$$

rezultă că pentru o valoare a lui t impusă, valoarea maximă a reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine se obține pentru acea valoare a pulsației care este soluția ecuației:

$$\omega - 2\beta t = 0$$

Această observație justifică afirmația că reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine se concentrează în jurul legii de variație a frecvenței instantanee a semnalului de analizat. De fapt se constată că la fel ca şi în cazul exemplului din paragraful 2.3, proiecția curbei care uneşte maximele reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine pe planul (t, ω) este tocmai legea de variație a frecvenței instantanee a semnalului de analizat. Această observație justifică concentrarea reprezentării timp-frecvență pe legea frecvenței instantanee. Din păcate nici în cazul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă nici în cazul reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine această concentrare nu este perfectă, nefiind descrisă de o lege de forma:

$$\delta\left(\omega - \omega_i(t)\right)$$

Capitolul 4

REPREZENTAREA TIMP-FRECVENȚĂ DE TIPUL WIGNER-VILLE

Considerând semnalul de energie finită $x(t)$, i se asociază nucleul:

$$K_{W-V}(t,\ \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \tag{67}$$

Transformarea Fourier a acestei funcții, în raport cu variabila τ, poartă numele de reprezentare timp-frecvență de tipul Wigner-Ville:

$$TF_x^{W-V}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\,\omega\,\tau}\, d\tau \tag{68}$$

4.1. EXPRIMĂRI ALTERNATIVE ALE REPREZENTĂRII DE TIP WIGNER - VILLE

Comparând nucleele reprezentărilor timp-frecvență de tipul Wigner-Ville şi funcție de incertitudine se constată că:

$$K_{W-V}(t,\ \tau) = K_{FI}(\tau,\ t) \tag{69}$$

Deci cele două nuclee se pot obține unul pe baza celuilalt prin schimbarea de variabilă:

$$t \leftrightarrow \tau$$

De aici rezultă asemănarea remarcabilă între reprezentările timp-frecvență de tipul Wigner-Ville şi funcție de incertitudine ale aceluiaşi semnal.

De aceea şi reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville poate fi privită ca şi o reprezentare adaptivă. În continuare se calculează transformata Fourier bidimensională a reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville.

$$F\left\{TF_x^{W-V}(\alpha,\ \beta)\right\}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{W-V}(\alpha,\ \beta)\, e^{-j(\alpha\,\omega\ +\ \beta\,t)}\, d\alpha\, d\beta$$

sau ținând seama de expresia reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville:

$$F\left\{TF_x^{W-V}(\alpha,\beta)\right\}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\alpha+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(\alpha-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\beta\tau}d\tau\right]e^{-j(\alpha\omega+\beta t)}\,d\alpha\,d\beta$$

Schimbând în membrul drept ordinea de integrare, ultima relație devine:

$$F\left\{TF_x^{W-V}(\alpha,\beta)\right\}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\alpha+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(\alpha-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\alpha\omega}d\alpha\right]e^{-j\beta\tau}d\tau\;e^{-j\beta t}d\beta$$

sau:

$$F\left\{TF_x^{W-V}(\alpha,\beta)\right\}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{FI}(\tau,-\omega)\;e^{-j\beta\tau}d\tau\;e^{-j\beta t}\,d\beta$$

Dar, transformata Fourier a reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine $TF_x^{FI}(\tau,-\omega)$, în raport cu variabila τ este:

$$F\left\{TF_x^{FI}(\tau,-\omega)\right\}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{FI}(\tau,-\omega)\,e^{-j\beta\tau}d\tau$$

De aceea, expresia transformării Fourier bidimensionale a reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville devine:

$$F\left\{TF_x^{W-V}(\alpha,\beta)\right\}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F\left\{TF_x^{FI}(\tau,-\omega)\right\}(\beta)\,e^{-j\beta t}d\beta$$

Deoarece membrul drept reprezintă o transformare Fourier în raport cu variabila β, ultima relație devine:

$$F\left\{TF_x^{W-V}(\alpha,\beta)\right\}(t,\omega) = F\left\{F\left\{TF_x^{FI}(\tau,-\omega)\right\}(\beta)\right\}(t)$$

sau pe baza teoremei simetriei:

$$F\left\{TF_x^{W-V}(\alpha,\beta)\right\}(t,\omega) = 2\pi\;TF_x^{FI}(-t,-\omega)$$

În sfârşit, ţinând seama de proprietatea de conjugare simetrică a reprezentării timp-frecvenţă de tipul funcţie de incertitudine, se obţine:

$$F\left\{TF_x^{W-V}(\alpha, \beta)\right\}(t, \omega) = 2\pi\ TF_x^{FI^*}(t, \omega) \tag{70}$$

În consecinţă se poate afirma că reprezentarea timp-frecvenţă de tipul funcţie de incertitudine reprezintă transformarea Fourier bidimensională a reprezentării timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville.

Această legătură este utilă pentru demonstrarea proprietăţilor reprezentării timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville pe baza proprietăţilor reprezentării timp-frecvenţă de tipul funcţie de incertitudine.

4.2 PROPRIETĂŢILE REPREZENTĂRII TIMP-FRECVENŢĂ DE TIPUL WIGNER-VILLE

În primul rând se verifică dacă această reprezentare timp-frecvenţă este o densitate spectrotemporală de energie. În acest scop se calculează integrala:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{W-V}(\alpha, \beta)\, d\alpha\ d\beta$$

Dar această integrală reprezintă valoarea în origine a transformării Fourier bidimensionale a reprezentării timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville.

În consecinţă:

$$I = F\left\{TF_x^{W-V}(\alpha, \beta)\right\}(0, 0) = 2\pi\, TF_x^{FI^*}(0, 0) = 2\pi\, E_x \tag{71}$$

Deci proprietatea P1 din paragraful 1.2 este verificată, reprezentarea timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville este o densitate spectrotemporală de energie. În continuare se studiază proprietăţile marginale ale acestei reprezentări timp-frecvenţă. În acest scop se calculează pentru început integrala:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{W-V}(t, \omega)\, d\omega$$

Se constată că:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right] d\omega$$

Inversând ordinea de integrare rezultă:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, d\omega \right] d\tau$$

Dar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, d\omega = F\{1(\omega)\}\, d\tau = 2\pi\delta(\tau)$$

De aceea:

$$I_1 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \delta(\tau)\, d\tau = 2\pi |x(t)|^2$$

Deci reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville reprezintă o densitate temporală de energie.

În continuare se calculează integrala:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{W-V}(t, \omega)\, dt$$

Pe baza definiției reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville se poate scrie:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right] dt$$

sau schimbând ordinea de integrare:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt \right] e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Dar făcând în integrala interioară schimbarea de variabilă:

$$t - \frac{\tau}{2} = u$$

aceasta devine:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(u)\, x(u + \tau)\, du$$

Membrul drept al ultimei relații reprezintă funcția de autocorelație a semnalului $x^*(t)$, $r_{x^*x^*}(\tau)$. De aceea integrala I_2 devine:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} r_{x^*x^*}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Este vorba despre transformata Fourier a autocorelației semnalului $x^*(t)$, care după cum se ştie reprezintă densitatea spectrală de energie a acestui semnal:

$$I_2 = \left| F\left\{x^*(u)\right\}(\omega) \right|^2 = \left|X^*(-\omega)\right|^2 = \left|X(-\omega)\right|^2$$

Deci reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville este şi o densitate spectrală de energie.

În consecință se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville are proprietatea P2 din paragraful 1.2.

În continuare se calculează conjugata complexă a reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville:

$$\left(TF_x^{W-V}(t, \omega)\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\omega\tau}\, d\tau$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$u = -\tau$$

se obține:

$$TF_x^{W-V^*}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{u}{2}\right) x^*\left(t - \frac{u}{2}\right) e^{j\,\omega\,u}\ du$$

adică tocmai expresia reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville. S-a demonstrat aşadar relația:

$$TF_x^{W-V^*}(t,\ \omega) = TF_x^{W-V}(t,\ \omega) \tag{72}$$

În consecință se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville este reală. Din păcate ea nu este şi pozitiv definită. În continuare se va demonstra afirmația aceasta. În acest scop se va demonstra pentru început că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville este biliniară. Se consideră în acest scop semnalele $x_1(t)$ şi $x_2(t)$. Se calculează reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville a semnalului $\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)$ unde α şi β sunt constante complexe.
Folosind relațiile:

$$TF_{x_1x_2}^{W-V}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_2^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\,\omega\tau}\ d\tau$$

$$TF_{x_2x_1}^{W-V}(t,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_1^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\,\omega\tau}\ d\tau$$

se obține:

$$\begin{aligned} TF_{\alpha x_1 + \beta x_2}^{W-V}(t,\ \omega) = |\alpha|^2 TF_{x_1}^{W-V}(t,\ \omega) + |\beta|^2 TF_{x_2}^{W-V}(t,\ \omega) + \alpha\,\beta^* TF_{x_1x_2}^{W-V}(t,\ \omega) + \\ + \beta\alpha^* TF_{x_2x_1}^{W-V}(t,\ \omega) \end{aligned} \tag{73}$$

Se constată identitatea acestei relații cu relația (30') dacă:

$$T\{x_l,\ x_k\}\ (t,\ \omega) = TF_{x_lx_k}^{W-V}(t,\ \omega), \qquad l \neq k$$

respectiv:

$$T\{x_1,\ x_l\}\ (t,\ \omega) = TF_{x_l}^{W-V}(t,\ \omega), \qquad l = 1,2$$

În consecință se poate afirma că:
$_3R_1$ Reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville este biliniară. Membrul drept al relației (73) poate fi pus chiar într-o formă mai simplă. Se calculează în acest scop conjugata complexă a lui $TF_{x_1x_2}^{W-V}(t,\omega)$.

$$TF_{x_1x_2}^{W-V^*}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x_2\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{j\omega\tau}\,d\tau$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$u = -\tau$$

ultima relație devine:

$$TF_{x_1x_2}^{W-V^*}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*\left(t-\frac{u}{2}\right)x_2\left(t+\frac{u}{2}\right)e^{-j\omega u}\,du = TF_{x_2x_1}^{W-V}(t,\omega)$$

De aceea relația (73) mai poate fi scrisă în forma:

$$TF_{\alpha x_1+\beta x_2}^{W-V}(t,\omega)=|\alpha|^2\,TF_{x_1}^{W-V}(t,\omega)+|\beta|^2\,TF_{x_2}^{W-V}(t,\omega)+2Re\left\{\alpha\beta^*TF_{x_1x_2}^{W-V}(t,\omega)\right\} \quad (74)$$

Revenind la demonstrația afirmației că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville nu este pozitiv definită, se presupune că semnalele $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ de mai sus au suporturi compacte disjuncte, intervalele In1 şi In2. Se face notația:

$$x_o(t) = \alpha\,x_1(t) + \beta\,x_2(t)$$

Se face ipoteza că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville este pozitivă, oricare ar fi semnalul căruia i se aplică. Rezultă relațiile:

$$TF_{x_k}^{W-V}(t,\omega) \geq 0, \qquad k = 0, 1, 2$$

Prin aplicarea proprietății marginale din domeniul timp se pot scrie relațiile:

$$\int_{-\infty}^{\infty} TF_{x_k}^{W-V}(t,\omega)\,d\omega = 2\pi\left|x_k(t)\right|, \quad k=0,1,2$$

În consecință:

$$TF_{x_k}^{W-V}(t,\omega)=0\,,\quad (\forall)\, t\notin In_k\,,\quad k=0,1,2$$

În ultima relație s-a folosit notația:

$$I\,n_o = I\,n_1 \bigcup I\,n_2$$

Dar pe baza proprietății de biliniaritate:

$$TF_{x_o}^{W-V}(t,\omega)=|\alpha|^2 TF_{x_1}^{W-V}(t,\omega)+|\beta|^2 TF_{x_2}^{W-V}(t,\omega)+2\mathrm{Re}\left\{\alpha\beta^* TF_{x_1x_2}^{W-V}(t,\omega)\right\} \qquad (74)$$

În exteriorul intervalului In1, funcția de două variabile $TF_{x_1}^{W-V}(t,\omega)$ este nulă iar semnalul $x_o(t)$ este identic cu semnalul $\beta x_2(t)$. De aceea relația (74) devine:

$$|\beta|^2 TF_{x_2}^{W-V}(t,\omega)=|\beta|^2 TF_{x_2}^{W-V}(t,\omega)+2\mathrm{Re}\left\{\alpha\beta^* TF_{x_1x_2}^{W-V}(t,\omega)\right\}$$

În consecință:

$$(\forall)\, t\notin I\,n_1\,,\quad 2\mathrm{Re}\left\{\alpha\beta^* TF_{x_1x_2}^{W-V}(t,\omega)\right\}=0$$

În exteriorul intervalului $I\,n_2$, $TF_{x_1}^{W-V}(t,\omega)$ este nulă iar semnalul $x_o(t)$ este identic cu semnalul $\alpha x_1(t)$. De aceea relația (74) devine:

$$|\alpha|^2 TF_{x_1}^{W-V}(t,\omega)=|\alpha|^2 TF_{x_1}^{W-V}(t,\omega)+2\mathrm{Re}\left\{\alpha\beta^* TF_{x_1x_2}^{W-V}(t,\omega)\right\}$$

De aceea:

$$(\forall)\, t\notin I\,n_2\,,\quad 2\mathrm{Re}\left\{\alpha\beta^* TF_{x_1x_2}^{W-V}(t,\omega)\right\}=0$$

Întrucât intervalele $I\,n_1$ şi $I\,n_2$ sunt disjuncte rezultă că:

$$(\forall)\, t\in R\,,\quad 2\mathrm{Re}\left\{\alpha\beta^* TF_{x_1x_2}^{W-V}(t,\omega)\right\}=0$$

De aceea relația (74) devine:

$$TF_{x_o}^{W-V}(t,\omega)=|\alpha|^2 TF_{x_1}^{W-V}(t,\omega)+|\beta|^2 TF_{x_2}^{W-V}(t,\omega)$$

Integrând în ambii membrii de la $-\infty$ la ∞ , în raport cu variabila *t*, se obţine:

$$\left|X_o(-\omega)\right|^2 = |\alpha|^2 \left|X_1(-\omega)\right|^2 + |\beta|^2 \left|X_2(-\omega)\right|^2$$

sau:

$$\left|X_o(\omega)\right|^2 = |\alpha|^2 \left|X_1(\omega)\right|^2 + |\beta|^2 \left|X_2(\omega)\right|^2$$

adică:

$$\left(\alpha X_1(\omega) + \beta X_2(\omega)\right)\left(\alpha X_1(\omega) + \beta X_2(\omega)\right)^* = |\alpha|^2 \left|X_1(\omega)\right|^2 + |\beta|^2 \left|X_2(\omega)\right|^2$$

respectiv:

$$|\alpha|^2 \left|X_1(\omega)\right|^2 + |\beta|^2 \left|X_2(\omega)\right|^2 + \alpha\,\beta^* X_1(\omega)\, X_2^*(\omega) + \alpha^*\beta\, X_1^*(\omega)\, X_2(\omega) = |\alpha|^2 \left|X_1(\omega)\right|^2 + |\beta|^2 \left|X_2(\omega)\right|^2$$

Ultima relaţie se mai scrie:

$$2\,Re\left\{\alpha\,\beta^* X_1(\omega)\, X_2^*(\omega)\right\} = 0, \quad (\forall)\ \omega \in R \tag{74}$$

Acest rezultat este în contradicţie cu faptul că semnalele $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ sunt de durată limitată (deci de bandă nelimitată). Conform principiului reducerii la absurd rezultă că ipoteza de pozitivitate a reprezentării timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville este falsă. Deci reprezentarea timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville nu are proprietatea P3 din paragraful 1.2

Negativitatea locală a reprezentării timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville afectează interpretarea fizică a acestei reprezentări. Atât densitatea temporală de energie cât şi densitatea spectrală de energie ale unui semnal sunt pozitiv definite. De aceea şi densitatea spectrotemporală de energie ar trebui să fie pozitiv definită. De aceea negativitatea locală a reprezentării timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville este o insuficienţă remarcabilă a acestei reprezentării.

Se poate demonstra că această reprezentare timp-frecvenţă nu este cauzală. Deci reprezentarea timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville nu verifică proprietatea P4 din paragraful 1.2. În schimb se poate demonstra că această reprezentare timp-frecvenţă este inversabilă.

În continuare se determină modul în care reacționează reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville la translații în planul timp-frecvență. În acest scop se determină legătura între reprezentările timp-frecvență de tipul Wigner-Ville ale semnalelor $x(t)$ şi :

$$x_{t_o,\omega_o}(t) = x(t - t_o)\, e^{j\,\omega_o\, t}$$

Pentru aceasta se foloseşte faptul că reprezentarea timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine este transformata Fourier bidimensională a reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville, se foloseşte legătura dintre reprezentările de tipul funcție de incertitudine ale semnalelor $x(t)$ şi $x_{t_o,\omega_o}(t)$ precum şi proprietățile de translație în timp şi în frecvență ale transformării Fourier bidimensionale. Se obține:

$$TF_{x_{t_o,\omega_o}}^{W-V}(t,\,\omega) = TF_x^{W-V}(t - t_o,\,\omega - \omega_o) \tag{75}$$

Deci reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville verifică proprietatea P6 din paragraful 1.2. În continuare se calculează reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville a semnalului:

$$x_k(t) = \sqrt{k}\, x(k\,t)$$

Aceasta este:

$$TF_{x_k}^{W-V}(t,\,\omega) = k \int_{-\infty}^{\infty} x\left(k\,t + \frac{k\,\tau}{2}\right) x^*\left(k\,t - \frac{k\,\tau}{2}\right) e^{-j\,\omega\tau}\, d\tau$$

Cu schimbarea de variabilă:

$$k\,\tau = u$$

se obține:

$$TF_{x_k}^{W-V}(t,\,\omega) = k \int_{-\infty}^{\infty} x\left(k\,t + \frac{u}{2}\right) x^*\left(k\,t - \frac{u}{2}\right) e^{-j\,\frac{\omega}{k}\,u}\, \frac{du}{k}$$

adică:

$$\mathrm{TF}_{x_k}^{W-V}(t,\,\omega) \;=\; \mathrm{TF}_{x}^{W-V}\left(k\,t,\;\frac{\omega}{k}\right) \tag{76}$$

Deci reprezentarea Wigner-Ville verifică proprietatea P7 din paragraful 1.2.

În continuare se prezintă legătura dintre reprezentarea Wigner-Ville a semnalului obținut prin convoluția a două semnale şi reprezentările Wigner-Ville ale acestora.

Conform [59] se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville are proprietatea de filtrare (P8 în paragraful 1.2):

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow \mathrm{TF}_{y}^{W-V}(t,\,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{TF}_{h}^{W-V}(t-s,\omega)\;\mathrm{TF}_{x}^{W-V}(s,\omega)\,ds \tag{77}$$

Dar şi reprezentarea de tipul funcție de incertitudine are această proprietate. Ținând seama de dualitatea timp-frecvență indusă de transformarea Fourier precum şi de faptul că cele două reprezentări timp-frecvență sunt legate prin transformarea Fourier bidimensională rezultă că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville are şi proprietatea de modulație (P9 în paragraful 1.2):

$$y(t) \;=\; m(t)\,x(t) \Rightarrow \mathrm{TF}_{y}^{W-V}(t,\,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{TF}_{m}^{W-V}(t,\,\omega-\xi)\;\mathrm{TF}_{x}^{W-V}(t,\,\xi)\,d\xi \tag{78}$$

În continuare se verifică proprietățile de suport ale reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville. Se consideră că semnalul $x(t)$ are suportul temporal intervalul $[t_1, t_2]$. Produsul $x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^{*}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ va fi nenul dacă:

$$t_1 \le t+\frac{\tau}{2} \le t_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2t_1-2t \le \tau \le 2t_2-2t$$

şi

$$t_1 \le t-\frac{\tau}{2} \le t_2 \;\Leftrightarrow\; 2t_1-2t \le -\tau \le 2t_2-2t \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2t-2t_2 \le \tau \le 2t-2t_1$$

adică dacă:

$$\tau \in \left[2t_1-2t,\; 2t_2-2t\right] \cap \left[2t-2t_2,\; 2t-2t_1\right]$$

Intersecția este nevidă dacă:

$$2t_2 - 2t > 2t - 2t_2 \Leftrightarrow t < t_2$$

sau dacă:

$$2t_1 - 2t < 2t - 2t_1 \Leftrightarrow t > t_1$$

În consecință suportul temporal al funcției $\mathrm{TF}_x^{W-V}(t, \omega)$ este intervalul $[t_1, t_2]$. Deci reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville conservă suportul temporal al semnalului căruia i se aplică.

Reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville a semnalului $x(t)$ poate fi pusă în forma:

$$\mathrm{TF}_x^{W-V}(t, \omega) = F\left\{x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[F\left\{x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right\} * F\left\{x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right\}\right](\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[F\left\{x\left(\frac{\tau+2t}{2}\right)\right\}(\omega) * F\left\{x^*\left(-\left(\frac{\tau-2t}{2}\right)\right)\right\}\right](\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2F\{x(\tau+2t)\}(2\omega) * 2F\left\{x^*(\tau-2t)\right\}(-2\omega)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[e^{j4\omega t} X(2\omega) * e^{j4\omega t} X^*(2\omega)\right]$$

Considerând că suportul frecvențial al semnalului $x(t)$ este intervalul $[-\omega_1, \omega_1]$ rezultă că suportul funcției $X(2\omega)$ este intervalul $\left[-\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}\right]$ și deci că suportul frecvențial al funcției $\mathrm{TF}_x^{W-V}(t, \omega)$ este intervalul $[-\omega_1, \omega_1]$. S-a demonstrat că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville conservă și suportul frecvențial al semnalului căruia i se aplică. În consecință proprietatea P11 din paragraful 1.2 este verificată de către reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville. Această reprezentarea verifică și proprietatea de unitaritate (formula lui Moyal). Într-adevăr, ținând seama de legătura dintre reprezentările timp-frecvență de

tipul funcție de incertitudine şi Wigner-Ville, relația (63) din paragraful 3.1 devine pentru:

$$x_1(t) = y_1(t) \text{ şi } x_2(t) = y_2(t)$$

$$\left\langle F^*\left\{TF_{x_1}^{W-V}(t, \omega)\right\}(\alpha, \beta),\ F^*\left\{TF_{x_2}^{W-V}(t, \omega)\right\}(\alpha, \beta)\right\rangle = \left|\langle x_1, x_2 \rangle\right|^2$$

sau pe baza relației lui Parseval, din cazul transformării Fourier bidimensionale:

$$\left\langle TF_{x_1}^{W-V}(t, \omega),\ TF_{x_2}^{W-V}(t, \omega)\right\rangle_{L^2(R^2)} = \left|\langle x_1, x_2 \rangle\right|^2$$

Deci reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville verifică şi proprietatea P10 din paragraful 1.2.

Nici reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville nu se concentrează perfect pe legea de variație a frecvenței instantanee (aşa cum se va vedea din exemplul prezentat în paragraful următor). Totuşi există un semnal a cărui reprezentare timp-frecvență de tipul Wigner-Ville are proprietatea de concentrare perfectă, dar aceasta nu este un semnal de energie finită. Este vorba despre semnalul:

$$x(t) = A \cos 2\pi t^2$$

Şi asupra acestei proprietăți a reprezentării sale de tipul Wigner-Ville se va reveni mai târziu.

Deci reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville nu verifică proprietatea P13 din paragraful 1.2.

Un semnal determinist staționar de energie finită poate fi scris în forma:

$$x_s(t) = \sum_n a_n e^{j\omega_n t}$$

Reprezentarea sa timp-frecvență de tipul Wigner-Ville este:

$$TF_{x_s}^{W-V}(t, \omega) = \sum_n \sum_m a_n a_m^* e^{j(\omega_n - \omega_m)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\omega - \frac{\omega_n + \omega_m}{2}\right)\tau} d\tau$$

Deoarece integrala din membrul drept reprezintă transformarea Fourier a semnalului $1(\tau)$, ultima relație se mai scrie:

$$TF_{x_s}^{W-V}(t, \omega) = 2\pi \sum_n \sum_m a_n a_m^* e^{j(\omega_n - \omega_m)t}\ \delta\left(\omega - \frac{\omega_n + \omega_m}{2}\right)$$

Proprietăți	Reprezentarea timp-frecvență		Observații
	Funcție de incertitudine TF^{FI}	Wigner-Ville TF^{W-V}	
Liniaritate	NU	NU	
Biliniaritate	DA	DA	
Densitate spectrotemporală de energie (P1)	NU	DA	$TF^{FI}(t, \omega)$ este o reprezentare timp-frecvență corelativă
Pozitivitate (P3)	NU	NU	$TF_x^{W-V}(t, \omega)$ este o reprezentare timp-frecvență reală
Cauzalitate (P4)	NU	NU	
Inversabilitate (P5)	DA	DA	
Invarianță la translații (P6)	NU	DA	$TF^{FI}_{x_{t_0,\omega_0}}(t, \omega) = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t_0} TF_x^{FI}(t,\omega)$
Invarianță la scalare (P7)	DA	DA	
Convoluție (P8)	DA	DA	
Modulație (P9)	DA	DA	
Unitaritate (P10)	DA	DA	
Conservarea suporturilor (P11)	NU	DA	
Identificarea staționarității (P12)	NU	NU	
Concentrare pe legea frecvenței instantanee	NU	NU	

Tabelul 1.4.1 Proprietățile reprezentărilor timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine şi Wigner-Ville.

De aceea se constată că nu este îndeplinită relația:

$$\frac{\partial\, TF_{x_s}^{W-V}(t, \omega)}{\partial\, t} = 0 \quad (\forall)\, t \in R$$

În consecință se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville nu verifică proprietatea P12 din paragraful 1.2, neputând fi utilizată pentru identificarea semnalelor staționare.

În tabelul 1.4.1. sunt prezentate proprietățile reprezentărilor timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine respectiv Wigner-Ville.
Numărul mare de proprietăți ale reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville fac din aceasta arhetipul reprezentărilor timp-frecvență de tipul densitate spectrotemporală de energie.

4.2 EXEMPLU

Fie semnalul:

$$x(t) = e^{-\alpha t^2} \cos \omega_o t$$

Semnalul analitic asociat acestui semnal este:

$$x_o(t) = e^{-\alpha t^2} e^{j \omega_o t}$$

Pulsația instantanee a acestui semnal este:

$$\omega_i(t) = \omega_o$$

În continuare se calculează reprezentarea Wigner-Ville a semnalului considerat:

$$TF_x^{W-V}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(t+\frac{\tau}{2}\right)^2} \cos\left[\omega_o\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right] e^{-\alpha\left(t-\frac{\tau}{2}\right)^2} \cdot$$

$$\cdot \cos\left[\omega_o\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] e^{-j\omega\tau} d\tau$$

sau:

$$TF_x^{W-V}(t, \omega) = e^{-2\alpha t^2} \cos 2\omega_o t \, F\left\{e^{-\frac{\alpha\tau^2}{2}}\right\}(\omega) + e^{-2\alpha t^2} F\left\{e^{-\frac{\alpha\tau^2}{2}} \cos \omega_o \tau\right\}$$

Ținând seama de expresia transformării Fourier a semnalului Gaussian se obține:

$$TF_x^{W-V}(t, \omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-2\alpha t^2}\left(\cos 2\omega_o t \, e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{2\alpha}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{2\alpha}}\right) \quad (79)$$

Se constată că în domeniul frecvență această funcție are 3 maxime, la pulsațiile $\omega = 0$ şi $\omega = \pm\omega_o$. În consecință se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville se concentrează pe curba de variație a frecvenței sale instantanee, dar că această concentrare nu este perfectă. Se remarcă similitudinea dintre relațiile (36) şi (79). De aceea comentariile făcute la exemplul de spectrogramă din paragraful 2.3 sunt valabile şi în exemplul de față.

Capitolul 5

REPREZENTAREA TIMP-FRECVENȚĂ DE TIPUL "WAVELET"

Admițând că semnalul nestaționar $x(t)$ este descris printr-o succesiune de semnale de durată limitată, dintre care primele sunt de durată mare şi cu viteză de variație redusă iar ultimele sunt scurte şi cu variație rapidă, ar fi util ca acest semnal să fie prelucrat cu ajutorul unei reprezentări timp-frecvență care să folosească o fereastră temporală lungă la începutul analizei şi scurtă la sfârşit. O fereastră temporală de acest fel este:

$$w(\tau) = \sqrt{s}\, \psi\left(s\,(\tau - t)\right)$$

unde funcția $w(\tau)$ se numeşte "wavelets mother" iar s este un parametru numit factor de scară care ține seama de durata semnalului de analizat. O reprezentare bidimensională a semnalului $x(t)$, care foloseşte o astfel de fereastră este transformarea “wavelet”:

$$\mathrm{CWT}_x(s,\, t) = \sqrt{s} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \psi\left(s\,(\tau - t)\right) d\tau \qquad (80)$$

Aceasta este o reprezentare de tipul timp-factor de scară.

Dacă se consideră că parametrul s este un raport de pulsații: $s = \dfrac{\omega}{\omega_o}$, ω_o fiind pulsația centrală a filtrului trece bandă cu răspunsul la impuls $\psi(\tau)$ atunci transformarea “wavelet” devine o reprezentare timp-frecvență adaptivă:

$$\mathrm{TF}_x^{\mathrm{CWT}}(\omega,\, t) = \sqrt{\left|\frac{\omega}{\omega_o}\right|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \psi\left(\frac{\omega}{\omega_o}\,(\tau - t)\right) d\tau \qquad (81)$$

5.1. EXPRIMĂRI ALTERNATIVE ALE REPREZENTĂRII DE TIP “WAVELET”

Folosind notația:

$$\psi_s(\tau) = \sqrt{s}\, \psi\,(s\,\tau)$$

se observă că transformarea "wavelet" poate fi exprimată cu ajutorul unui produs scalar, pentru fiecare valoare a lui s:

$$\mathrm{CWT}_x(s,\ t) \ = \ \left\langle x(\tau),\ \psi_s\,(\tau\ -\ t)\right\rangle$$

De obicei funcția $\psi(\tau)$ reprezintă răspunsul la impuls al unui filtru trece-bandă. Dacă funcția $\psi(\tau)$ este reală, ultima relație devine:

$$\mathrm{CWT}_x(s,\ t) \ = \ x(t) * \psi_s^{\vee}(t) \ ; \quad \psi_s^{\vee}(t) \ = \ \psi_s(-\ t)$$

Deci pentru fiecare valoare pozitivă a lui *s*, transformarea "wavelet" a semnalului $x(t)$ este răspunsul sistemului liniar şi invariant în timp, cu răspunsul la impuls $\psi_s^{\vee}(t)$, la semnalul $x(t)$. Acest sistem are răspunsul în frecvență:

$$F\ \left\{\psi_s^{\vee}(t)\right\}(\omega) \ = F\left\{\psi_s(t)\right\}(-\omega) \ = \ F\left\{\sqrt{s}\ \psi(-s\ t)\right\}(\omega) \ = \frac{1}{\sqrt{s}}\ F\left\{\psi(t)\right\}\left(-\frac{\omega}{s}\right)$$

Deci pentru localizarea în timp a semnalului $x(t)$, în cazul transformării "wavelet", este responsabilă fereastra temporală $\psi_s(t)$ iar pentru localizarea în frecvență, fereastra $F\left\{\psi(t)\right\}\left(-\frac{\omega}{s}\right)$. Durata ferestrei temporale este:

$$\sigma_t^2 \ = \ \frac{1}{s^2}\ \int_{-\infty}^{\infty} u^2\psi^2(u)\ du \ = \ \frac{{}_t\sigma^2}{s^2}$$

unde cu ${}_t\sigma$ s-a notat durata ferestrei temporale $\psi(\tau)$, care este o constantă. În consecință localizarea temporală a semnalului $x(t)$ depinde de parametrul *s*. Banda ferestrei frecvențiale este:

$$\sigma_\omega^2 \ = \ \int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\left|\ F\left\{\psi_s^{\vee}(t)\right\}\ (\omega)\right|^2\ d\omega \ = \ s^2\ \int_{-\infty}^{\infty}u^2\left|\ F\left\{\psi(t)\right\}\ (u)\right|^2\ du$$

sau:

$$\sigma_\omega^2 \ = \ s^2\ {}_\omega\sigma^2$$

unde s-a notat cu ${}_\omega\sigma$ banda ferestrei frecvențiale $F\left\{\psi(t)\right\}\ (\omega)$.

În consecință şi localizarea frecvențială a semnalului $x(t)$, realizată de transformarea “wavelet” depinde de parametrul *s*. Se constată că localizarea temporală se înrăutățeşte cu creşterea lui *s* şi că localizarea frecvențială se înbunătățeşte cu creşterea lui *s*. Se constată de asemenea că:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 = {}_t\sigma^2 {}_\omega\sigma^2$$

În consecință, indiferent de valoarea lui *s*, localizarea în planul timp-frecvență realizată de fereastra $\psi_s(\tau)$ este identică cu cea realizată de fereastra "generatoare" $\psi(\tau)$. De aici rezultă superioritatea reprezentării timp-frecvență de tipul “wavelet” asupra celorlalte reprezentări timp-frecvență la prelucrarea semnalelor care pot fi descompuse într-o succesiune de semnale de durată limitată, cu viteza de variație tot mai mare şi cu durata tot mai scurtă odată cu creşterea timpului.

Dacă frecvența centrală a filtrului trece bandă cu răspunsul la impuls $\psi(t)$ este ω_o, atunci, având în vedere legătura dintre răspunsurile în frecvență ale celor două filtre,

$$F\{\psi_s(\tau)\}(\omega_{o\,s}) = \frac{1}{\sqrt{s}} F\{\psi(\tau)\}\frac{(\omega_{o\,s})}{s}$$

rezultă că:

$$\omega_{o\,s} = s\,\omega_o$$

De aceea se poate scrie:

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega_{o\,s}} = \frac{{}_\omega\sigma}{\omega_o} = Q$$

Rezultă că toate filtrele trece-bandă cu răspunsurile în frecvență $F\{\psi_s(t)\}(\omega)$ au acelaşi factor de calitate Q, indiferent de *s*.

5.2 PROPRIETĂȚILE REPREZENTĂRII TIMP-FRECVENȚĂ DE TIP "WAVELET"

Având în vedere exprimarea acestei reprezentări timp-frecvență ca şi produs de convoluție rezultă că reprezentarea timp-frecvență de tip "wavelet" este liniară. Ea nu reprezintă o densitate spectrotemporală de energie şi nu are proprietăți marginale

corecte. La fel ca şi în cazul reprezentării timp-frecvență de tip transformare Fourier scurtă şi în cazul reprezentării timp-frecvență de tip “wavelet” prin ridicarea modulului la pătrat se obține o nouă reprezentare timp-frecvență:

$$\mathrm{TF}_x^{\mathrm{Sc}}(t,\,\omega) \;=\; \left|\mathrm{TF}_x^{\mathrm{CWT}}(t,\,\omega)\right|^2$$

numită scalogramă. Această reprezentare timp-frecvență este biliniară (la fel ca şi spectrograma). Scalograma este o densitate spectrotemporală de energie. De fapt, în [40], este demonstrată relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{TF}_x^{\mathrm{CWT}}(t,\,\omega)\left[\mathrm{TF}_y^{\mathrm{CWT}}(t,\,\omega)\right]^* dt\,d\omega \;=\; \mathrm{C}_\psi \langle x,\,y\rangle^* \tag{82}$$

unde constanta C_ψ se calculează cu relația:

$$\mathrm{C}_\psi \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(u)|^2}{|u|}\,du \tag{83}$$

De aceea este necesar ca funcția generatoare $\psi(\tau)$ să îndeplinească condiția:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(u)|^2}{|u|}\,du \;<\; \infty \tag{83'}$$

Dacă semnalele *x* şi *y* se consideră identice atunci relația (82) devine:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{TF}_x^{\mathrm{CWT}}(t,\,\omega)\right|^2 dt\,d\omega \;=\; \mathrm{C}_\psi \cdot \mathrm{E}_x \tag{84}$$

Se poate deci afirma că $\left|\mathrm{TF}_x^{\mathrm{CWT}}(t,\,\omega)\right|^2$ reprezintă o densitate spectrotemporală de energie. Nici scalograma nu are proprietăți marginale corecte. În schimb se constată că scalograma este reală şi pozitivă pentru orice punct din planul timp-frecvență. Din păcate reprezentarea timp-frecvență de tip "wavelet" nu are aceeaşi proprietate.
Conform [42] reprezentarea timp-factor de scară de tip "wavelet" este inversabilă fiind valabilă relația:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_x(s, u)\, \psi_s(t - u)\, ds\, du \qquad (85)$$

Scalograma, în schimb, nu este inversabilă.

Fie:

$$x_{t_o}(t) = x(t - t_o)$$

Se determină legătura dintre reprezentările timp-frecvență de tip "wavelet" ale semnalelor $x(t)$ şi $x_{t_o}(t)$. Având în vedere că reprezentarea timp-frecvență de tip "wavelet" se poate exprima printr-o operație de convoluție care este invariantă la translații rezultă că se poate scrie:

$$TF_{x_{t_o}}^{CWT}(t, \omega) = TF_x^{CWT}(t - t_o, \omega)$$

Deci această reprezentare timp-frecvență este invariantă la translații în timp. În consecință şi scalograma are această proprietate.

Din păcate cele două reprezentări nu sunt invariante şi în domeniul frecvență. Deci ele nu au proprietatea P6 din paragraful 1.2. În schimb se poate afirma, [68], că acestea au proprietatea de invarianță la dilatări (P7 în paragraful 1.2). Celelalte proprietăți utile pentru o reprezentare timp-frecvență, propuse în paragraful 1.2, nu sunt verificate nici de către reprezentarea timp-frecvență de tip "wavelet" nici de către scalogramă. În schimb alte proprietăți interesante ale acestor reprezentări sunt prezentate în [42].

5.3 EXEMPLU

Fie semnalul de analizat:

$$x(t) = p_T(t)\, e^{j\omega_1 t}\ ; \qquad p_T(t) = \sigma(t + T) - \sigma(t - T)$$

Vom considera, pentru comoditate, că $\omega_o = 1$.

În acest caz se obține:

$$TF_x^{CWT}(t,\omega) = \sqrt{\omega}\int_{-\infty}^{\infty} p_T(\tau)\,\psi\big(\omega(\tau - t)\big)\,e^{j\omega_1\tau}\,d\tau$$

sau, cu schimbare de variabilă:

$$\omega(\tau - t) = u$$

rezultă:

$$TF_x^{CWT}(t,\omega) = \left(\sqrt{\omega}\right)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} p_T\left(\frac{u}{\omega} + t\right)\psi(u)\,e^{j\omega_1\left(\frac{u}{\omega}+t\right)}\,du =$$

$$= \frac{e^{j\omega_1 t}}{\sqrt{\omega}}\int_{-\omega T - \omega t}^{\omega T - \omega t}\psi(u)\,e^{j\omega_1\frac{u}{\omega}}\,du = \frac{e^{j\omega_1 t}}{\sqrt{\omega}}\,F^*\left\{\psi(u)\,p_T\left(\frac{u}{\omega} + t\right)\right\}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)$$

Prin particularizarea funcției $\psi(u)$, analiza din acest exemplu poate fi încheiată.

Se poate totuşi constata că variabilele au fost separate. Comportarea în domeniul timp este descrisă de exponențiala complexă $e^{j\omega_1 t}$. Comportarea în domeniul frecvență este descrisă de transformata Fourier a produsului $\psi(u)\,p_T\left(\frac{u}{\omega} + t\right)$.

Capitolul 6

GENERALIZĂRI

În capitolele anterioare au fost introduse câteva reprezentări timp-frecvență. Fiecare dintre acestea este de fapt un exemplu pentru câte o clasă de reprezentări timp-frecvență. Rolul acestui capitol este de a prezenta aceste clase, prin generalizarea exemplelor din capitolele anterioare.

Toate reprezentările timp-frecvență prezentate până acum se aplică semnalelor de energie finită, fiind funcționale definite pe $L^2(R)$. Dacă acest spațiu se înlocuieşte cu un spațiu mai cuprinzător atunci se obțin reprezentări timp-frecvență generalizate.

În sfârşit, pot fi introduse conexiuni între teoria reprezentărilor timp-frecvență şi teoria semnalelor aleatoare.

După cum s-a constatat există două tipuri de reprezentări timp-frecvență, cele liniare, ca de exemplu reprezentarea timp-frecvență de tip "wavelet" şi cele biliniare, ca de exemplu reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville. Pentru început vor fi prezentate generalizări ale reprezentărilor timp-frecvență liniare.

6.1 CAZUL REPREZENTĂRILOR LINIARE

În continuare se va utiliza următoarea definiție pentru o reprezentare timp-frecvență liniară.

Definiție Dacă sunt satisfăcute ipotezele:

1) $A \subset R^n, \quad K : R \times A \to C;$

2) $(\forall)\ a \in A,\ \tau \to K(\tau, a)$ este măsurabilă şi $\int_{-\infty}^{\infty} |K(\tau, a)|^2 d\tau = 1,\ a \in A$

3) $(\forall)\ \omega \in R,\ a \to F\{K(\tau, a)\}(\omega)$ este măsurabilă şi $\int_A |F\{K(\tau, a)\}(\omega)|^2 da = C < \infty$

atunci se numeşte reprezentarea timp-frecvență a semnalului de energie finită $x(\tau)$, funcția:

$$TF_x : A \times R \to C,\ TF_x(t, \omega) = \langle x(\tau), K(\tau - t, \omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, K^*(\tau - t, \omega)\, d\tau \quad (86)$$

În funcție de expresia nucleului $K(x, y)$ se obțin expresiile unor reprezentări timp-frecvență liniare diferite.

Dacă expresia nucleului este:

$$K_1(\tau, a) = w(\tau)\, e^{j a \tau},\ \text{cu} \int_{-\infty}^{\infty} |w(\tau)|^2 d\tau = 1,\ A = R \quad (87)$$

funcție care verifică ipotezele 1), 2) şi 3) atunci se obține reprezentarea timp-frecvență:

$$\mathrm{TF}_x^1(t,\,\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, w^*(\tau - t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega\,(\tau - t)}\, d\tau \;=\; e^{\mathrm{j}\,\omega\,t}\cdot \mathrm{TF}_x^{\mathrm{STFT}}(t,\,\omega)$$

Cu alte cuvinte, pentru această alegere a nucleului se obține reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă.

Dacă expresia nucleului este:

$$K_2(\tau,a) = \sqrt{a^{-1}}\,\psi(a^{-1}\tau),\ \text{cu}\ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\tau)|^2\, d\tau = 1,\ A = R - \{0\}\ \text{şi}\ F(\psi(\tau))(0) = 0 \qquad (88)$$

funcție care verifică ipotezele 1), 2) şi 3) atunci se obține reprezentarea timp-factor de scară $\mathrm{CWT}_x(t,\,s)$, $s \;=\; \dfrac{1}{a}$, respectiv timp-frecvență:

$$\mathrm{TF}_x^2(t,\,\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\sqrt{|\omega|}\;\psi^*(\omega(\tau - t))\, d\tau \;=\; \mathrm{TF}_x^{\mathrm{CWT}}(t,\,\omega)\,,\ (s \;=\; \omega)$$

Pentru stabilirea ultimei egalități s-a folosit relația (81) în care s-a considerat că ω_o are valoarea 1.

Deoarece, alegând nucleele pe baza relațiilor (87) şi (88), se obțin două reprezentări timp-frecvență remarcabile, se poate afirma că definiția de la începutul acestui paragraf este consistentă. O reprezentare timp-frecvență definită astfel are două proprietăți remarcabile:

P1. Pentru orice cuplu de semnale de energie finită $x_1(t)$ şi $x_2(t)$, se poate scrie:

$$\int_{A\times R} \left(\mathrm{TF}_{x_1}\right)(a,\,b)\left(\mathrm{TF}_{x_2}\right)^*(a,\,b)\, da\, db \;=\; c\,\langle x_1,\,x_2\rangle_{L^2} \qquad (89)$$

unde c este o constantă, şi :

P2. Spațiul H_K obținut aplicând operatorul TF oricărui semnal de energie finită:

$$H_K \;=\; \mathrm{TF}\,\{L^2(R)\}$$

este un spațiu Hilbert cu nucleu reproducător, [66]. Cu alte cuvinte are loc o relație de tipul:

$$\mathrm{TF_f}(a,\ b)\ =\ \frac{1}{c}\int_{\mathrm{A}\times R}\mathrm{TF_f}\ (a',\ b')\ \mathrm{K}\ (a,\ b,\ a',\ b')\ da'\ db' \tag{90}$$

unde:

$$\mathrm{K}\ (a,\ b,\ a',\ b')\ =\ \left\langle \mathrm{K}_{(a,\ b)},\ \mathrm{K}_{(a',\ b')}\right\rangle .$$

Proprietățile obținute prin particularizările proprietății P1 conform relațiilor (87) şi (88) au fost deja prezentate în capitolele 2 şi 5. Proprietățile obținute prin particularizarea proprietății P2 conform relațiilor (87) şi (88) sunt prezentate în [42].

Relația (87) arată că nucleul $K_1(x, a)$ se obține prin modularea de amplitudine a purtătoarei e^{jax} cu fereastra temporală $w(x)$. De aceea reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă este invariantă la translații în frecvență. Relația (88) arată că nucleul $K_2(x, a)$ se obține prin scalarea funcției generatoare ψ. De aceea reprezentarea timp-frecvență de tip "wavelet" este invariantă la scalare. De fapt se spune că cele două reprezentări timp-frecvență sunt cazuri particulare de reprezentări de grup de pătrat integral. Reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă corespunde grupului Weyl-Heisenberg (caracterizat de invarianța la translații) iar reprezentarea timp-frecvență de tip "wavelet" corespunde grupului $ax + b$ [40]. O reprezentare timp-frecvență liniară, invariantă atât la translații în planul timp-frecvență cât şi la scalare, ar putea fi aceea al cărei nucleu ar reuni proprietățile nucleelor $K_1(x, a)$ şi $K_2(x, b)$. Nucleul unei astfel de reprezentări ar putea fi:

$$\mathrm{K_3}(x,\ a,\ b)\ =\ \mathrm{K_1}(x,\ a)\ \mathrm{K_2}(x,\ b)\ =\ \sqrt{|a|^{-1}}\ \psi\left(a^{-1}x\right)\ e^{\mathrm{j}\,b\,x} \tag{91}$$

Se poate verifica că acest nucleu satisface ipotezele definiției de la începutul acestui paragraf pentru alegerea $\mathrm{A} = R - \{0\}$. Reprezentarea timp-frecvență corespunzătoare a fost utilizată în [91]. Această nouă reprezentare timp-frecvență are expresia:

$$\mathrm{TF_f^{gen}}(t,\ \omega, s) = \sqrt{s}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ \psi^{*}\left(s\ (\tau - t)\right) e^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_o}\tau}\ d\tau \tag{92}$$

şi are proprietățile P1 şi P2 enunțate în acest paragraf. Ea este invariantă la translații în planul timp-frecvență precum şi la scalări în timp. În continuare se stabileşte o formulă alternativă de calcul al reprezentărilor timp-frecvență liniare bazată pe dezvoltarea în serie a acestor funcții. Se consideră în acest scop că mulțimea de funcții $\mathrm{B}\ =\ \left\{\alpha_{\mathrm{k}}(t)\right\}_{\mathrm{k}\in Z}$ este o bază ortonormală a spațiului Hilbert $\mathrm{L}^2(R)$.

Orice semnal de energie finită se poate exprima în forma:

$$x(t) = \sum_k c_k \, \alpha_k(t) ; \quad c_k = \langle x(t), \, \alpha_k(t) \rangle$$

De aceea reprezentarea timp-frecvență generalizată (definită la începutul acestui paragraf) a semnalului $x(t)$ poate fi pusă în forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{TF}_x(t, \, \omega) &= \langle x(\tau), \, \mathrm{K}(\tau - t, \, \omega) \rangle = \left\langle \sum_k c_k \, \alpha_k(\tau) \, , \, \mathrm{K}(\tau - t, \, \omega) \right\rangle = \\ &= \sum_k c_k \langle \alpha_k(\tau) \, , \, \mathrm{K}(\tau - t, \, \omega) \rangle = \sum_k c_k \, \mathrm{TF}_{\alpha_k}(t, \, \omega) \end{aligned} \tag{93}$$

Deci reprezentările timp-frecvență liniare ale unui semnal de energie finită pot fi calculate pe baza reprezentărilor timp-frecvență ale elementelor bazei B. Dacă funcțiile $\alpha_k(t)$ se obțin prin translatarea unei funcții generatoare:

$$\alpha_k(t) = \alpha(t - t_k)$$

atunci relația (93) se mai scrie:

$$\mathrm{TF}_x(t, \, \omega) = \sum_k c_k \, \mathrm{TF}_\alpha(t - t_k, \, \omega) \tag{94}$$

şi pentru cunoaşterea reprezentării timp-frecvență a semnalului $x(t)$ este suficientă doar cunoaşterea coeficienților c_k şi a reprezentării timp-frecvență a semnalului $\alpha(t)$. Reprezentarea timp-frecvență a semnalului x poate fi calculată şi mai uşor dacă funcția $\mathrm{TF}_\alpha(t, \omega)$ are un suport compact în planul timp-frecvență, I, şi dacă momentele de timp t_k sunt astfel alese încât intervalele I_k şi I_{k+1}, suporturile funcțiilor $\mathrm{TF}_\alpha(t - t_k, \omega)$ şi $\mathrm{TF}_\alpha(t - t_{k-1}, \omega)$, să fie disjuncte. Această condiție este satisfăcută dacă funcțiile $\alpha_k(t)$ au o bună localizare în planul timp-frecvență. Astfel de funcții se numesc atunci atomi timp-frecvență [145].

Fie:

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{L}^2\left[-\frac{\mathrm{T}}{2}, \, \frac{\mathrm{T}}{2}\right]$$

O bază ortonormală a acestui spațiu este $\mathrm{B}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{T}}} \, e^{\mathrm{j}\, k \frac{2\pi}{\mathrm{T}} t} \right\}_{k \in Z}$. Orice element al

lui H_1 se poate descompune în serie Fourier [99] în forma:

$$x(t) = \sum_k c_k \, e^{j k \frac{2\pi}{T} t} \tag{95}$$

De aceea orice reprezentare timp-frecvență liniară a acestui semnal poate fi scrisă în forma:

$$TF_x(t, \omega) = \sum_k c_k \, TF_{e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \, p_{\frac{T}{2}}(\tau)}(t, \omega)$$

Această exprimare nu este însă cea mai avantajoasă, deoarece deşi exponenţialele complexe au o localizare perfectă în frecvenţă ele sunt complet nelocalizate în timp. La fel ca şi în cazul dezvoltării în serie Fourier (în relaţia (95) semnalul $x(t)$ poate fi prelungit prin periodicitate în exteriorul intervalului $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, ieşind din spaţiul H_1) şi funcţia $TF_x(t, \omega)$ (nulă în exteriorul intervalului $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$) poate fi prelungită prin periodicitate după variabila *t*, cu perioada T. În acest mod se poate vorbi despre reprezentări timp-frecvenţă liniare ale semnalelor periodice. Acestea vor fi funcţii periodice de aceaşi perioadă T după variabila *t*.

Fie de exemplu semnalul periodic:

$$x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$$

Revenind la relaţia (86) se constată că:

$$TF_x(t, \omega) = x(t) * K^*(-t, \omega) \tag{96}$$

Deci această reprezentare timp-frecvenţă liniară reprezintă răspunsul sistemului liniar şi invariant în timp cu răspunsurile la impuls $K^*(-t, \omega)$ la semnalul $x(t)$.

Dar după cum se ştie, [99], răspunsul sistemului cu răspunsul la impuls $h(t)$ la semnalul $\cos \omega_o t$ este semnalul:

$$y(t) = \left| F\{h(t)\}(\omega_o) \right| \cos\left(\omega_o t + \arg F\{h(t)\}(\omega_o)\right)$$

În consecinţă reprezentarea timp-frecvenţă liniară generalizată a semnalului

cosinusoidal este:

$$TF_x(t,\ \omega) = \left|F\left\{K^*(-t,\ \omega)\right\}(\omega_o)\right|\cos\left(\omega_o t + \arg\ F\left\{K^*(-t,\omega)\right\}(\omega_o)\right)$$

Se constată periodicitatea sa după variabila *t,* cu perioada T.

În sfârşit, ţinând seama de faptul că definiţia reprezentării timp-frecvenţă liniară generalizată se bazează pe operaţia de convoluţie în timp (conform relaţiei (96)) şi că această operaţie este definită şi pentru distribuţii, rezultă că se pot calcula şi reprezentări timp-frecvenţă liniare ale distribuţiilor.

Astfel reprezentarea timp-frecvenţă liniară generalizată a distribuţiei Dirac este:

$$TF_\delta(t,\ \omega) = \delta(t) * K^*(-t,\ \omega) = K^*(0,\ \omega)$$

În consecinţă se poate vorbi despre reprezentări timp-frecvenţă sau timp-factor de scară definite pe spaţiul distribuţiilor temperate.

Problema reprezentărilor timp-frecvenţă liniare este însă interpretabilitatea lor fizică. În capitolele anterioare au fost prezentate şi reprezentări timp-frecvenţă biliniare cum ar fi reprezentarea timp-frecvenţă de tipul funcţie de incertitudine. Reprezentarea timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville este o pseudodensitate de energie. Ea nu este o densitate spectrală de energie deoarece nu este pozitiv definită. De fapt reprezentarea timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville este prototipul unei întregi clase de reprezentări timp-frecvenţă, aşa numita clasă a lui Cohen.

6.2 CAZUL REPREZENTĂRILOR BILINIARE. CLASA LUI COHEN

Se studiază reprezentările timp-frecvenţă sau timp-factor de scară care pot fi puse în forma unei funcţionale biliniare.

$${}_cTF_x(t,\ \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(u,\ u',\ t,\ \lambda)\ x\ (u)\ x^*(u')\ du\ du' \qquad (97)$$

unde λ reprezintă o pulsaţie (ω) sau un factor de scară (s), iar K reprezintă nucleul tranformării.

În funcţie de expresia şi proprietăţile nucleului ales se obţine o reprezentare bidimensională cu anumite proprietăţi. Dacă se impun constrângeri reprezentării bidimensionale rezultă constrângeri asupra nucleului său. Printre aceste constrângeri este firesc să figureze proprietăţi de invarianţă la diferite transformări ale reprezentării

bidimensionale. Dacă este vorba despre o anumită transformare T efectuată asupra semnalului de analizat $x(t) \in L^2(R)$:

$$x(t) \xrightarrow{T} T\{x(t)\} \tag{98}$$

invarianța la această transformare se exprimă prin condiția:

$${}_{c}TF_{T\{x\}}(t, \omega) = T\{ {}_{c}TF_{x}(t, \omega)\} \tag{99}$$

Este firesc să se impună invarianța reprezentărilor bidimensionale la grupul de transformări asociate la cele două tipuri de abordare: timp-frecvență respectiv timp-factor de scară. Se va arăta în continuare cum aceste condiții de invarianță generează clase de reprezentări bidimensionale biliniare de tipul Cohen.

6.2.1 CAZUL REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ

Se va impune invarianța la translații în planul timp-frecvență:

$${}_{ctf}TF_{x_{t_o,\omega_o}}(t, \omega) = {}_{ctf}TF_{x}(t - t_o, \omega - \omega_o) \tag{100}$$

unde x_{t_o,ω_o} este semnalul:

$$x_{t_o,\omega_o}(t) = x(t - t_o)\, e^{j\omega_o t}$$

Ținând seama de relația (97), condiția (100) impune următoarea condiție asupra nucleelor:

$$K(u + t_o, u' + t_o, t, \omega)\, e^{j\omega_o(u-u')} = K(u, u', t - t_o, \omega - \omega_o)$$

sau, fixând:

$$t = t_o \text{ şi } \omega = \omega_o$$

$$K(u + t, u' + t, t, \omega)\, e^{j\omega(u-u')} = K(u, u', 0, 0)$$

adică:

$$K(u, u', t, \omega) = K(u - t, u' - t, 0, 0)\, e^{-j\omega(u-u')} \tag{101}$$

De aceea se poate scrie:

$${}_{ctf}TF_{x}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K\left(s - t + \frac{\tau}{2}, s - t - \frac{\tau}{2}, 0, 0\right) x\left(s + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau\, ds \tag{102}$$

sau:

$$_{ctf}\mathrm{TF}_x(t,\,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} F\left\{\mathrm{K}\left(s-t+\frac{\tau}{2},\,s-t-\frac{\tau}{2},\,0,\,0\right)\,x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)\,x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega)\,ds$$

Dar:

$$F\left\{\mathrm{K}\left(s-t+\frac{\tau}{2},\,s-t-\frac{\tau}{2},\,0,\,0\right)\,x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)\,x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[F\left\{\mathrm{K}\left(s-t+\frac{\tau}{2},\,s-t-\frac{\tau}{2},\,0,\,0\right)\right\}(\omega)\ *\ F\left\{x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)\,x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega)\right]$$

Trebuie observat că:

$$F\left\{x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)\,x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega)\ =\ \mathrm{TF}_x^{\mathrm{W-V}}(s,\,\omega)$$

Cu notația: $\mathrm{TF}_K(t,\,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}\left(t+\frac{\tau}{2},\,t-\frac{\tau}{2},\,0,\,0\right)e^{j\omega\tau}\,d\tau$ relația (103) devine:

$$F\left\{\mathrm{K}\left(s-t+\frac{\tau}{2},\,s-t-\frac{\tau}{2},\,0,\,0\right)\,x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)\,x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega)\ =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{TF}_x^{\mathrm{W-V}}(s,\,u)\ F\left\{\mathrm{K}\left(s-t+\frac{\tau}{2},\,s-t-\frac{\tau}{2},\,0,\,0\right)\right\}(\omega-u)\,du\ =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{TF}_x^{\mathrm{W-V}}(s,\,u)\ \mathrm{TF}_K(s-t,\,u-\omega)\,du$$

De aceea se poate scrie:

$$_{ctf}\mathrm{TF}_x(t,\,\omega)\ =\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{TF}_x^{\mathrm{W-V}}(s,\,u)\ \mathrm{TF}_K(s-t,\,u-\omega)\,du\,ds \qquad (104)$$

sau explicitând reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville din integrand:

$$_{ctf}\mathrm{TF}_x(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{TF}_K(s-t,u-\omega)x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}\,du\,ds\,d\tau \qquad (105)$$

Se face notația:

$$f(u,\,\tau)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{TF}_K(t,\,\omega)\,e^{-j(\omega\tau+ut)}\,dt\,d\omega \qquad (106)$$

și:

$$_{ctf}\mathrm{TF}_x(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j(\omega\tau-us+ut)}\,f(u,\tau)\,du\,ds\,d\tau \qquad (107)$$

Aceasta este expresia generală a unei reprezentări timp-frecvență de tip Cohen. Se observă că prin specificarea funcției de parametrizare $f(u,\tau)$, se obține un anumit membru al acestei clase. În următorul tabel se prezintă condițiile pe care trebuie să le îndeplinească funcția de parametrizare pentru ca reprezentarea timp-frecvență corespunzătoare să îndeplinească fiecare dintre proprietățile din paragraful 1.2.

Proprietatea	Condiția asupra funcției de parametrizare
P1	$f(0,\ 0) = 1$
P2	$f(0,\ \tau) = f(u,\ 0) = 1$
P3	Această proprietate este satisfăcută doar de reprezentările timp-frecvență de tipul modul la pătrat
P4	$f(u,\ \tau) = e^{j\frac{u(\tau)}{2}}$
P5	$f(u,\ \tau) \neq 0$
P6	Toate reprezentările timp-frecvență din clasa lui Cohen satisfac această condiție.
P7	$f(u,\ \tau) = f\left(\frac{u}{k},\ k\tau\right),\ (\forall)\ k$
P8	$f(u,\ \tau) f(u,\ \tau') = f(u,\ \tau+\tau')$
P9	$f(u,\ \tau) f(u',\ \tau) = f(u+u',\tau)$
P10	$\lvert f(\xi,\ \tau)\rvert = 1$
P11	$\lvert s\rvert > \frac{\lvert\tau\rvert}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(u,\ \tau)\, e^{jus}\, du = 0$ $\lvert\omega\rvert > \frac{\lvert u\rvert}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(-u,\ \tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = 0$
P12	Nu există nici o funcție de parametrizare care să facă posibilă verificarea acestei proprietăți.
P13	Nu există nici o funcție de parametrizare care să facă posibilă verificarea acestei proprietăți.

Tabelul 1.6.2.1 Proprietăți utile ale funcțiilor de parametrizare.

În tabelul următor se prezintă câteva funcții de parametrizare, expresiile reprezentărilor timp-frecvență din clasa lui Cohen asociate precum şi proprietățile pe care le verifică aceste reprezentări.

$f(u,\tau)$	Denumire	${}_{c\,t\,f}\mathrm{TF}_x(t,\omega)$	Proprietăți verificate
1	Wigner-Ville	$\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\tau$	P1, P2, P5, P6, P7, P8, P9, P10, P11
$e^{j\frac{u}{2}\tau}$	Richaczek	$x(t)\,X^*(\omega)\,e^{-j\omega t}$	P1, P2, P5, P6, P7, P8, P9, P10, P11
$e^{\pm j\frac{u}{2}\lvert\tau\rvert}$	Page-Levin	$\frac{\partial}{\partial t}\left\lvert\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,\sigma\left(\pm\,(t-s)\right) e^{-j\omega s}\,ds\right\rvert^2$	P1, P2, P4, P5, P6, P7, P11
$\frac{\sin\frac{u}{2}\tau}{\frac{u}{2}\tau}$	Born-Jordan	$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\lvert\tau\rvert}\int_{t-\frac{\lvert\tau\rvert}{2}}^{t+\frac{\lvert\tau\rvert}{2}} x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}s\right] e^{-j\omega\tau}\,d\tau$	P1, P2, P6, P7, P11
$e^{-\left(\frac{u\tau}{2\sigma}\right)^2/2}$	Choi-Williams	$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma}{\lvert\tau\rvert}\,e^{-\frac{2\sigma^2(s-t)^2}{\tau^2}} x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau}\,ds\,d\tau$	P1, P2, P5, P6, P7
$\mathrm{IE}_w^{\mathrm{FI}^*}(u,\tau)$	Spectro-gramă	$\left\lvert\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,w^*(s-t)\,e^{-j\omega s}\,ds\right\rvert^2$	P1, P3, P6, P10

Tabelul 2.6.2.1 Exemple de reprezentări timp-frecvență aparținând clasei lui Cohen.

Se constată că numărul cel mai mare de proprietăți utile le au reprezentările timp-frecvență de tipul Wigner-Ville şi Richaczek. Trebuie remarcat că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville are în plus şi calitatea de a fi reală. De aceea ea poate fi considerată prototipul clasei lui Cohen. Mai trebuie observat că singura reprezentare timp-frecvență cauzală este cea de tipul Page-Levin şi că singura reprezentare timp-frecvență pozitivă din tabel este cea de tip spectrogramă. Trebuie remarcată diversitatea reprezentărilor timp-frecvență din clasa lui Cohen. De altfel aceste reprezentări timp-frecvență sunt subiectul unui număr impresionant de lucrări, dintre care se amintesc: [59], [68], [13], [27], [108], [8]. Ultimele două prezintă alte generalizări ale noțiunii de reprezentare timp-frecvență biliniară.

6.2.2 CAZUL REPREZENTĂRILOR TIMP-FACTOR DE SCARĂ

Se va impune invarianța la translații şi la dilatări în timp. Fie în acest scop semnalul:

$$x_{t_o, a_o}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0}} x\left(\frac{t - t_o}{a_o}\right)$$

Invarianța invocată mai sus revine la:

$$_{a\,t\,s}TF_{x_{t_o a_o}}(t, a) = {}_{a\,t\,s}TF_x\left(\frac{t - t_o}{a_o}, \frac{a}{a_o}\right) \tag{108}$$

Trebuie remarcată legătura dintre variabilele *s* şi *a* (ambele introduse pentru a descrie factorul de scară):

$$s = \frac{1}{a}$$

Ținând seama de relația (97), cu $\lambda = a$, condiția (108) impune următoarea condiție asupra nucleelor:

$$|a_o| K(a_o u + t_o, a_o u' + t_o, t, a) = K\left(u, u', \frac{t - t_o}{a_o}, \frac{a}{a_o}\right)$$

Fixând variabilele:

$$t = t_o \text{ şi } a = a_o$$

ultima relație devine:

$$K(u, u', t, a) = |a|^{-1} K\left(\frac{u - t}{a}, \frac{u' - t}{a}, 0, 1\right)$$

De aceea expresia reprezentării timp-factor de scară biliniară generalizată este:

$$_{a\,t\,s}TF_x(t, a) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} TS_K\left(\frac{s - t}{a}, a\,u\right) TF_x^{W-V}(s, u)\, ds\, du \tag{109}$$

unde s-a notat:

$$\mathrm{TS_K}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K}\left(t+\frac{\tau}{2},\ t-\frac{\tau}{2},0,1\right) e^{\mathrm{j}\,\omega\tau}\, d\tau \tag{110}$$

Relaţia (109) reprezintă expresia generală a unei reprezentări timp-factor de scară afină. Cu notaţia:

$$g(u,\ \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{TS_K}(t,\ \omega)\, e^{-\mathrm{j}\,u\,t}\, dt \tag{111}$$

relaţia (109) poate fi rescrisă în forma:

$${}_{\mathrm{ats}}\mathrm{TF_x}(t,\ a) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(u,\ \omega)\mathrm{X}\left(\frac{1}{a}\left(\omega-\frac{u}{2}\right)\right)\mathrm{X}^{*}\left(\frac{1}{a}\left(\omega+\frac{u}{2}\right)\right) e^{-\mathrm{j}\,u\,\frac{t}{a}}\, du\, d\omega \tag{112}$$

în care intervine funcţia de parametrizare $g(u,\omega)$. Aceasta clasă se mai numeşte şi clasa afină.

O reprezentare remarcabilă a acestei clase este reprezentarea timp-factor de scară de tip scalogramă. Alte exemple de reprezentări timp-factor de scară afine, precum şi constrângerile impuse funcţiilor lor de parametrizare de diferite proprietăţi dorite sunt prezentate în [59].

Până aici s-a considerat că semnalul de analizat este de energie finită. De fapt şi reprezentările biliniare pot fi utilizate pentru analiza unor semnale care aparţin şi altor clase de semnale. Acest lucru se datorează faptului că aceste reprezentări pot fi privite ca şi transformate Fourier. Atât membrul drept al relaţiei (105) cât şi membrul drept al relaţiei (112) pot fi exprimate cu ajutorul transformatei Fourier. Dar după cum se ştie, [99], transformarea Fourier este definită pe clase mai largi de semnale. De aceea se poate vorbi despre reprezentări timp-frecvenţă sau timp-factor de scară ale semnalelor periodice sau ale distribuţiilor.

De exemplu, se calculează în continuare reprezentarea timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville a semnalului periodic $x(t)$, cu dezvoltarea în serie Fourier:

$$x(t) = \sum_{\mathrm{k}} c_{\mathrm{k}}\ e^{\mathrm{j}\,\mathrm{k}\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\mathrm{t}}$$

Se obţine:

$$\mathrm{TF}_x^{W-V}(t,\,\omega) \;=\; F\left\{x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega) \;=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[F\left\{x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega)*F\left\{x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega)\right]$$

Dar:

$$F\left\{x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega)=F\left\{\sum_k c_k e^{\mathrm{j}\,k\,\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)}\right\}=$$

$$=\sum_k c_k\,F\left\{e^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)}\right\}=\sum_k c_k e^{\mathrm{j}\,k\frac{2\pi}{T}t}\,F\left\{e^{\mathrm{j}\,k\frac{\pi}{T}\,\tau}\right\}(\omega)=$$

$$=\sum_k c_k e^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t}\;2\pi\,\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{T}\right)$$

şi:

$$F\left\{x^*\left(t\;-\frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega)=\;F\left\{\sum_k c_k^* e^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}\right\}=$$

$$=\sum_k c_k^* e^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t}\;F\left\{e^{\mathrm{j}k\frac{\pi}{T}\tau}\right\}(\omega)=\sum_k c_k^* e^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t}\,2\pi\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{T}\right)$$

În consecinţă:

$$\mathrm{TF}_x^{W-V}(t,\,\omega) \;=\; (2\pi)\left[\sum_k c_k\;e^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t}\;\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{T}\right)*\sum_l c_l^*\;e^{-\mathrm{j}l\frac{2\pi}{T}t}\;\delta\left(\omega-l\;\frac{\pi}{T}\right)\right]\;=$$

$$=\;(2\pi)\sum_k\sum_l\;c_k c_l^*\,e^{\mathrm{j}(k-l)\frac{2\pi}{T}t}\,\delta\left(\omega-(k+l)\frac{\pi}{T}\right)$$

S-a demonstrat în acest mod că reprezentarea timp-frecvenţă a semnalului periodic $x(t)$ este discretă în domeniul fecvenţă (distanţa între două componente succesive fiind $\frac{\pi}{T}$) şi periodică de periodă T în domeniul timp.

Considerente similare pot fi făcute şi pentru celelalte reprezentări biliniare prezentate în acest capitol.

Trebuie remarcat că prelungirea prin periodicitate în domeniul timp a semnalului analizat este o cale pentru discretizarea în domeniul frecvență a reprezentărilor timp-frecvență biliniare.

Mai trebuie menționat că pot fi construite şi alte clase de reprezentări biliniare prin obținerea transformării Fourier bidimensionale a elementelor clasei lui Cohen respectiv elementelor clasei afine (a se vedea legătura dintre reprezentarea Wigner-Ville şi cea de tipul funcție de incertitudine).

6.3 LEGĂTURA DINTRE TEORIA REPREZENTĂRILOR BIDIMENSIONALE ŞI TEORIA SEMNALELOR ALEATOARE

Pentru început se justifică această legătură. Fără îndoială că elementul comun cel mai important pentru cele două teorii este noțiunea de nestaționaritate. Această observație lasă loc speranței ca să poată fi caracterizate semnalele nestaționare aleatoare cu ajutorul reprezentărilor timp-frecvență. S-a văzut deja că deşi cadrul natural al reprezentărilor timp-frecvență este spațiul semnalelor de energie finită se poate vorbi despre reprezentări timp-frecvență ale unor semnale care aparțin unor clase mai generale decât $L^2(R)$. În cazul semnalelor deterministe semnificația unei reprezentări timp-frecvență era aceea de densitate spectrotemporală de energie. După cum se ştie realizările unui semnal aleator sunt semnale de energie infinită. De aceea se vor căuta reprezentări timp-frecvență care să poată fi interpretate fizic ca şi densități spectrotemporale de putere.

Întâi de toate se vor identifica elementele din teoria semnalelor aleatoare care au fost deja utilizate în această lucrare.

Când au fost definite noțiunile de durată şi bandă ale unui semnal, cu scopul analizei localizării acestuia în planul timp-frecvență, au fost folosite formulele:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |x(\tau)|^2 \, d\tau, \qquad \sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

Aceste formule reprezintă momentele de ordinul II ale variabilelor aleatoare cu densitățile de probabilitate:

$$|x(\tau)|^2 \text{ respectiv } |X(\omega)|^2$$

Se poate considera că şi relațiile care descriu proprietățile P1 şi P2 au fost împrumutate din teoria semnalelor aleatoare.

Într-adevăr, reprezentarea timp-frecvență: $\frac{\mathrm{TF_x}(t,\,\omega)}{2\pi \mathrm{E_x}}$ poate fi privită ca şi densitate de probabilitate bidimensională deoarece conform proprietății P1, are loc relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{TF_x}(t,\,\omega)}{2\pi \mathrm{E_x}}\,dt\,d\omega \;=\; 1$$

În această interpretare condițiile proprietății P2 sunt proprietățile marginale ale unei densități de probabilitate bidimensională. În continuare se face o introducere alternativă a reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine bazată pe teoria semnalelor aleatoare inspirată din lucrarea [56]. Să considerăm problema clasică a testului de ipoteze binare. Pe baza măsurării semnalului recepționat $y(t)$ se face ipoteza H_o că s-a transmis doar zgomotul $z(t)$ sau ipoteza H_1 că s-a transmis suma dintre semnalul util $x_u(t)$ şi zgomotul $z(t)$. Se poate scrie:

$$\begin{cases} \mathrm{H_o}, & y(t) \;=\; z(t) \\ \mathrm{H_1}, & y(t) \;=\; x_u(t) + z(t) \end{cases}$$

Semnalul $x_u(t)$ este de forma unui semnal generator $x(t)$, dar este caracterizat de un anumit set de parametrii care îl diferențiază de semnalul generator. Se doreşte determinarea parametrilor semnalului $x_u(t)$ pentru ca aceasta să fie perfect cunoscut. Prima sarcină este una de detecție şi constă în a decide dacă la momentul t este corectă ipoteza H_o sau H_1. Cea de a doua este una de estimare a parametrilor semnalului şi este condiționată de faptul că ipoteza H_1 a fost reținută. Se notează cu V vectorul parametrilor semnalului care trebuie estimați. Se poate scrie:

$$x_u(t) \;=\; x_{V_o}(t)$$

Conform teoriei detecției optimale, [56], trebuie reținută ipoteza H_1, dacă cantitatea:

$$\max_{V} \left\{ \lambda(V) \;=\; \left\langle x_v,\, y \right\rangle \right\}$$

depăşeşte un anumit prag. Cu alte cuvinte trebuie corelată observația făcută, $y(t)$, cu un set de replici ale semnalului $x(t)$ care se diferențiază între ele prin valorile diferite ale elementelor vectorului V. Se declară că semnalul căutat este prezent în semnalul recepționat dacă cea mai mare valoare a funcției de corelație astfel obținută este superioară unui anumit prag. Intuitiv, această valoare maximă ar trebui să se obțină la coincidența dintre vectorul testat şi valoarea sa adevărată, deoarece atunci corelația

(neperturbată) este maximală. Se poate demonstra că într-adevăr este aşa şi că este posibil să se estimeze V pe baza relaţiei:

$$\hat{V} = \max_{V} \left\{ \lambda(V)/H_1 \right\}$$

Două exemple simple ale acestei strategii sunt furnizate de radar şi de sonar. În cele două cazuri, există emisia unui semnal şi recepţia unui ecou. În primă aproximare, făcând abstracţie de zgomotul aditiv, se poate considera că diferenţa de structură dintre semnalul emis şi semnalul recepţionat este datorată unei întârzieri de propagare (legată de distanţa dintre emiţător şi ţintă) şi de efectul Doppler (datorat mişcării relative dintre emiţător şi ţintă). Astfel, vectorul V_o care parametrizează modificările semnalului emis $x(t)$ este un vector cu două componente, una care codează întârzierea şi una care codează efectul Doppler. Dacă se presupune că semnalul emis este de bandă îngustă şi /sau că viteza relativă este mică (aşa cum este de obicei cazul în radar), efectul Doppler se traduce printr-o alunecare globală a spectrului semnalului, decalajul Doppler. Deci transformarea semnalului emis este descrisă de relaţia:

$$x(t) \rightarrow x(t-\tau)\, e^{j\omega t} = y(t)$$

unde τ măsoară întârzierea iar ω decalajul Doppler.
De aceea în acest caz:

$$\lambda(V) = \langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, e^{-j\omega t} dt = TF_x^{FI}(\tau, \omega)$$

Dar membrul drept este reprezentarea timp-frecvenţă de tipul funcţie de incertitudine. Iată cum, pornind de la o problemă bine cunoscută în teoria semnalelor aleatoare, s-a ajuns la necesitatea utilizării unei reprezentări timp-frecvenţă.

În literatura dedicată radarului, integrala din ultima relaţie este numită funcţie de incertitudine de bandă îngustă, sau în translaţie în sensul lui Woodward. Ea măsoară o corelaţie timp-frecvenţă, adică gradul de asemănare dintre un semnal şi variantele sale translatate în planul timp-frecvenţă.

6.3.1 DISTRIBUŢII DE PUTERE

Fie $x(t)$ un semnal aleator de medie nulă care are momente de ordinul 4 nenule. Fie mulţimea de funcţii ortogonale $\left\{ k_{t\lambda}(\tau) \right\}_{t \in R,\, \lambda \in R}$. Acestea au proprietatea:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_{t\lambda}(s)\, h_{t\lambda}^{*}(s')dt\, d\lambda = \delta(s-s')$$

Fie în sfârşit integrala:

$$L_x(t,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\; h_{t\lambda}^{*}(s)\, ds$$

unde λ reprezintă frecvenţa sau factorul de scară.

Evident şi acesta este un semnal aleator, fiecărei realizări a lui x corespunzându-i o realizare a lui $L_x(t,\lambda)$. Se calculează fluctuaţiile acestei integrale:

$$E\left\{\left|L_x(t,\lambda)\right|^2\right\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\, x^{*}(s')\, h_{t\lambda}^{*}(s)\, h_{t\lambda}(s')\, ds\, ds'\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left\{x(s)\, x^{*}(s')\right\} h_{t\lambda}^{*}(s)\, h_{t\lambda}(s')\, ds\, ds'$$

Cu E s-a notat operatorul de mediere statistică.
Dar:

$$E\left\{x(s)\, x^{*}(s')\right\} = r_{xx}(s-s')$$

reprezintă autocorelaţia semnalului aleator considerat.

De aceea ultima relaţie devine:

$$E\left\{\left|L_x(t,\lambda)\right|^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(s,s')\, h_{t\lambda}^{*}(s)\, h_{t\lambda}(s')\, ds\, ds' \qquad (113)$$

Această funcţie de două variabile poate fi privită ca şi o reprezentare timp-factor de scară a semnalului aleator $x(t)$. Ea reprezintă o distribuţie de putere. Într-adevăr, integrala sa dublă este o constantă. Să justificăm această afirmaţie. Avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left\{\left|\mathrm{L_x}(t,\,\lambda)\right|^2\right\} dt\, d\lambda \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{xx}}(s,s')\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h^{*}_{\mathrm{t}\,\lambda}(s)\, h_{\mathrm{t}\,\lambda}(s')dt\, d\lambda\right] ds\, ds'$$

Conform proprietății funcțiilor ortogonale se poate scrie:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left\{\left|\mathrm{L_x}(t,\,\lambda)\right|^2\right\} dt\, d\lambda \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{x}}(s,\,s')\,\delta(s-s')\, ds\, ds'$$

sau:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left\{\left|\mathrm{L_x}(t,\lambda)\right|^2\right\} dt\, d\lambda \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{xx}}(s,s)\, ds \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left\{\left|x(s)\right|^2\right\} ds$$

Conferind constantei din membrul drept al ultimei relații semnificația de putere a semnalului aleator $x(t)$, rezultă că într-adevăr $\mathrm{E}\left\{\left|\mathrm{L_x}(t,\lambda)\right|^2\right\}$ este o distribuție de putere.

O altă posibilitate de a introduce o reprezentare timp-frecvență a unui semnal aleator este de a considera media statistică a unei reprezentări timp-frecvență definită pentru semnale deterministe, calculată pe ansamblul realizărilor semnalului aleator considerat:

$$\mathrm{E}\left\{\mathrm{TF_x}(\mathrm{t},\,\omega)\right\}$$

În acest mod se poate generaliza de exemplu clasa lui Cohen. Conform relației (107), forma generală a unei reprezentări timp-frecvență din clasa lui Cohen este:

$$_{\mathrm{c\,t\,f}}\mathrm{TF_x}(t,\,\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\left(s+\frac{\tau}{2}\right) x^{*}\left(s-\frac{\tau}{2}\right) e^{-\mathrm{j}(\omega\tau-\mathrm{u\,s+u\,t})} f(u,\tau)du\, ds\, d\tau$$

Folosind relația:

$$F(s-t,\,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,\,\tau)\, e^{-\mathrm{j\,u\,(t\,-\,s)}}\, du \;=\; \mathrm{F}\left\{f(u,\,\tau)\right\}(t\,-\,s)$$

ultima relație se mai scrie:

$$E\left\{ {}_{ctf}TF_x(t,\ \omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s-t,\tau)x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}dsd\tau$$

Considerând că semnalul $x(t)$ este aleator rezultă că şi funcţia ${}_{ctf}TF_x(t,\ \omega)$ este aleatoare. Valoarea sa medie statistică, calculată pe ansamblul realizărilor este:

$${}_{ctf}TF_x(t,\ \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s-t,\tau)\ E\left\{x\left(s+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(s-\frac{\tau}{2}\right)\right\}e^{-j\ \omega\tau}ds\ d\tau$$

adică:

$$E\left\{ {}_{ctf}TF_x(t,\ \omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F\ (s-t,\ \tau)\ r_{xx}\left(s+\frac{\tau}{2},s-\frac{\tau}{2}\right)\ e^{-j\ \omega\tau}\ ds\ d\tau$$

Se constată că s-a obţinut în acest mod o nouă clasă de reprezentări timp-frecvenţă parametrizată prin intermediul funcţiei $F\ (s-t,\ \tau)$. Prin particularizarea acestei funcţii de parametrizare se obţin diferite elemente ale clasei. Alegerea funcţiei de parametrizare ar trebui făcută în aşa fel încât în cazul în care semnalul $x(t)$ ar fi staţionar reprezentarea timp-frecvenţă să devină la fiecare moment de timp densitatea spectrală de putere a semnalului considerat. Ipoteza de staţionaritate a semnalului aleator se exprimă prin:

$$r_{xx}(t,\ t') = r_{xx}(t-t')$$

Notând cu $P_x(\omega)$ densitatea spectrală de putere a semnalului $x(t)$ ar trebui să fie satisfăcută relaţia:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F\ (s-t,\ \tau)\ r_{xx}(\tau)\ e^{-j\ \omega\tau}\ ds\ d\tau\ =\ 2\pi\ P_x(\omega)$$

Având însă în vedere că autocorelaţia unui semnal aleator staţionar şi densitatea sa spectrală de putere sunt perechi Fourier, pentru ca ultima relaţie să aibe loc ar fi necesar ca:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s-t,\tau)\ ds\ =\ 2\pi$$

Ultima relaţie se mai scrie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\{f(u,\tau)\}\,(t-s)\,ds = 2\pi$$

sau cu schimbarea de variabilă:

$$t - s = w$$

se obține:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\{f(u,\tau)\}\,(w)\,dw = 2\pi$$

Având în vedere că membrul stâng reprezintă o transformată Fourier calculată în origine, ultima relație devine:

$$F\left\{F\left\{f(u,\tau)\right\}(w)\right\}\Big|_{u=0} = 2\pi$$

sau aplicând teorema simetriei:

$$2\pi f(0,\tau) = 2\pi$$

Deci condiția pe care trebuie să o satisfacă funcția de parametrizare pentru ca reprezentarea timp-frecvență definită de relația (114) să se particularizeze la fiecare moment de timp, în cazul semnalelor de analizat staționare, la o densitate spectrală de putere este:

$$f(0,\tau) = 1$$

Aceasta este tocmai condiția ca reprezentarea timp-frecvență corespunzătoare din cazul semnalelor deterministe să aibe o distribuție marginală corectă în domeniul frecvență (a se vedea tabelul 1.6.2.1).

Alte clase de reprezentări timp-frecvență, respectiv timp-factor de scară ale semnalelor aleatoare nestaționare sunt prezentate în [59], [108], [15], [67].

Capitolul 7

DISCRETIZAREA REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ

Toate reprezentările timp-frecvență şi timp-factor de scară prezentate sunt funcții continue de două variabile continue. Utilizarea lor presupune construcția unor aparate care pe baza semnalului $x(t)$ să reprezinte grafic $TF_x(t, \omega)$. Fiind vorba despre o reprezentare în trei dimensiuni, este utilă afişarea sa pe monitorul unui calculator. Din păcate sistemele de calcul numeric nu pot decât să aproximeze funcțiile continue de variabile continue prin funcții discrete de variabile discrete. De aceea este interesantă discretizarea reprezentărilor timp-frecvență. Aceasta se realizează prin eşantionarea funcției $TF_x(t, \omega)$. Se obțin eşantioanele $TF_x(n\, t_o, m\, \omega_o)$. Este important să se cunoască valorile minime ale paşilor t_o şi ω_o pentru ca pe baza eşantioanelor $TF_x(n\, t_o, m\, \omega_o)$ să se poată reconstrui exact $TF_x(t, \omega)$. Conform teoremei de eşantionare [80], [114], ar fi necesar ca suportul în planul timp-frecvență al funcției $TF_x(t, \omega)$ să fie limitat. Pentru aceasta ar fi necesar ca atât suportul semnalului $x(t)$ cât şi suportul transformatei sale Fourier să fie limitate (proprietatea P11 din paragraful 1.2). Dar acest lucru nu este posibil, orice semnal de durată limitată fiind de bandă nelimitată şi reciproc. În consecință funcția $TF_x(t, \omega)$ nu va putea fi reconstruită perfect din eşantioanele sale. E clar că reconstrucția va fi cu atât mai bună cu cât valorile t_o şi ω_o vor fi mai mici, dar ea nu va fi niciodată perfectă. De aceea se vor căuta alte strategii de eşantionare cum ar fi, de exemplu, eşantionarea neuniformă. În continuare se va analiza pentru început discretizarea reprezentării timp-frecvență respectiv timp-factor de scară prin eşantionare în raport doar cu cea de-a doua variabilă, pentru ca apoi să se analizeze cazul în care se eşantionează în raport cu ambele variabile. La început va fi analizat cazul reprezentărilor bidimensionale liniare pentru ca apoi să se prezinte şi cazul reprezentărilor biliniare.

7.1 DISCRETIZAREA REPREZENTĂRILOR LINIARE

Pentru început ne vom referi la discretizarea realizată prin eşationarea în raport cu cea de a doua variabilă. Acest caz este important deoarece face legătura între teoria reprezentărilor timp-frecvență sau timp-factor de scară şi teoria băncilor de filtre.

Aceste sisteme, constituind ansambluri de filtre, se folosesc cu precădere în construcția analizoarelor de spectru în timp real, aparate pentru analiza semnalelor nestaționare [124].

După cum s-a arătat în capitolul precedent orice reprezentare timp-frecvență sau timp-factor de scară liniară este de forma:

$$TF_x(t, \lambda) = x(t) * K^*(-t, \lambda)$$

Eşantionarea acestei funcții în raport cu cea de a doua variabilă conduce la obținerea următoarelor valori:

$$TF_x(t, \lambda_k) = x(t) * K^*(-t, \lambda_k)$$

Fiecare dintre acestea este o funcție de timp parametrizată de valorile λ_k, reprezentând răspunsul filtrului cu răspunsul la impuls $K^*(-t, \lambda_k)$ la semnalul de analizat. Practic este vorba de prelucrarea semnalului $x(t)$ cu o familie de filtre parametrizată de valorile λk. În cazul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă expresiile răspunsurilor la impuls ale acestor filtre sunt:

$$K_1^*(-t, \omega_k) = w(-t)\, e^{j\omega_k t} = w^{\vee}(t)\, e^{j\omega_k t} \qquad (115)$$

Se observă că toate aceste filtre se obțin dintr-un prototip (filtrul cu răspunsul la impuls $w^{\vee}(t)$) prin modulație de amplitudine (înmulțirea cu exponențiala complexă $e^{j\omega_k t}$). În consecință, toate aceste filtre au acelaşi gabarit. Diferența între răspunsurile lor în frecvență este dată doar de valoarea diferită a pulsațiilor centrale ω_k.

Dacă eşantionarea în domeniul frecvență este uniformă atunci:

$$\omega_k = k\,\omega_o, \quad k \in Z$$

În consecință distanța dintre frecvențele centrale a două filtre consecutive este egală cu ω_o. Întrucât toate aceste filtre au aceeaşi bandă la - 3 dB rezultă că factorul lor de calitate este crescător cu *k*. În consecință selectivitatea acestor filtre creşte odată cu creşterea frecvenței lor centrale.

Aducând la intrarea unei astfel de bănci de filtre semnalul de analizat, $x(t)$, la ieşirea fiecărui filtru se va obține câte o secțiune verticală prin reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă a lui $x(t)$. La ieşirea filtrului cu numărul de ordine *k* se va obține funcția $TF_x^{STFT}(t, k\,\omega_o)$. În cazul reprezentării timp-factor de scară de tipul "wavelet" expresia răspunsurilor la impuls ale filtrelor din structura băncii este:

$$K_2^*(-t, a_k) = \sqrt{a_k^{-1}}\, \psi^*(-a_k^{-1} t) = \sqrt{a_k^{-1}}\, \psi^{\vee *}(a_k^{-1} t) \qquad (116)$$

Toate aceste filtre se obțin prin dilatări ale răspunsului la impuls $\psi^{\vee *}(t)$ al filtrului prototip. Ultima relație mai poate fi pusă şi în forma:

$$K_2^*(-t, s_k) = \sqrt{s_k}\ \psi^{\vee *}(s_k\, t);\quad s_k = \frac{1}{a_k}$$

Conform afirmațiilor din capitolul 5, aceste filtre (pentru $s_k = k$) au factor de calitate constant, şi în consecință şi banda lor de trecere variază de la o valoare a indicelui *k* la alta. Este tocmai cazul analizorului de spectru în timp real [125].

De aceea se poate afirma că rezoluția frecvențială este constantă în cazul reprezentărilor de tipul transformare Fourier scurtă şi că rezoluția frecvențială creşte odată cu creşterea frecvenței în cazul reprezentării de tip "wavelet".

În continuare se trece la cazul eşantionării bidimensionale. În acest scop se consideră că la ieşirea fiecărui filtru (cu răspunsul la impuls $K^*(-t, \lambda k)$) din banca de filtre amintită mai sus se conectează câte un circuit de eşantionare ideal. Considerând că eşantioanele se prelevează la momentele de timp t_m, ele vor avea valorile:

$$TF_x(t_m, \lambda_k) = x(t) * K^*(-t, \lambda_k)\Big|_{t = t_m} \qquad (117)$$

Problema este determinarea distribuției momentelor de timp t_m care permite, pe baza valorilor $TF_x(t_m, \lambda_k)$ construcția semnalului $TF_x(t, \lambda_k)$, sau mai general a semnalului $x(t)$.

Legitimitatea acestei probleme provine din faptul că deşi reconstrucția perfectă a funcției $TF_x(t, \lambda)$ pe baza eşantioanelor sale $TF_x(m\, t_o, k\, \lambda_o)$ (obținute în urma eşantionării uniforme) nu este posibilă, totuşi reprezentarea $TF_x(t, \lambda)$ este redundantă. Această afirmație este justificată de proprietatea P2 din paragraful 6.1:

$$TF_x(t, \lambda) = \frac{1}{c} \int_{A \times R} TF_x(t', \lambda')\, K(t, \lambda, t', \lambda')\, dt'\, d\lambda'$$

Această redundanță îndreptățeşte speranța reconstrucției funcției de două variabile pe baza eşantioanelor sale $TF_x(t_m, \lambda_k)$. Dacă totuşi această reconstrucție nu este posibilă, rămâne speranța reconstrucției semnalului inițial $x(t)$.

7.1.1 DISCRETIZAREA REPREZENTĂRII TIMP-FRECVENȚĂ DE TIPUL TRANSFORMARE FOURIER SCURTĂ

S-a demonstrat deja că localizarea în domeniul timp a reprezentării depinde de durata ferestrei temporale $w(t)$, σ_t şi că localizarea în domeniul frecvență a reprezentării depinde de banda ferestrei temporale, σ_ω.

Se poate deci afirma că semnalul de analizat este descris prin intermediul reprezentării sale timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă, la momentul t şi la pulsația ω, într-o anumită zonă din planul timp-frecvență numită "celulă de rezoluție" şi descrisă de produsul cartezian:

$$\left[t - \frac{\sigma_t}{2},\ t + \frac{\sigma_t}{2}\right] \times \left[\omega - \frac{\sigma_\omega}{2},\ \omega + \frac{\sigma_\omega}{2}\right]$$

Cu alte cuvinte nu are rost să se caute informații despre acest semnal pentru momentul t şi pulsația ω în alte zone ale planului timp-frecvență. În figura 1.7.1.1 se prezintă acoperirea planului timp-frecvență cu celulele de rezoluție în cazul reprezentării de tipul transformare Fourier scurtă.

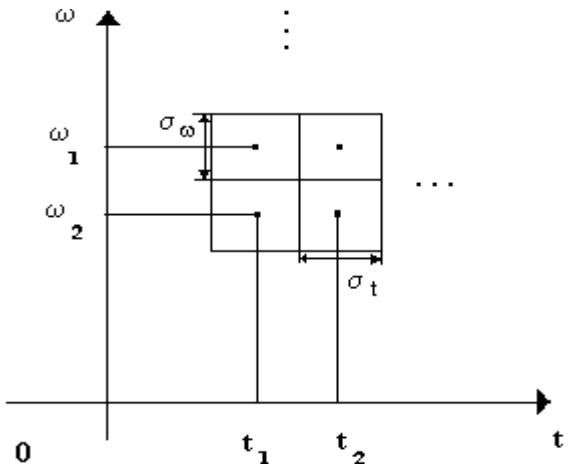


Figura 1.7.1.1 Acoperirea planului timp-frecvență în cazul reprezentării de tipul transformare Fourier scurtă.

E clar că o densitate minimă de eşantionare poate fi obținută dacă se prelevează câte un eşantion din reprezentarea timp-frecvență cu coordonatele în fiecare celulă de rezoluție. Într-adevăr, dacă în mulțimea $\left\{\mathrm{TF}_x^{\mathrm{STFT}}\left(t_m,\ \omega_k\right)\right\}_{m\in Z,\ k\in Z}$ nu ar exista nici un eşantion care să îndeplinească condiția:

$$t_o - \frac{\sigma_t}{2} \le t_m \le t_o + \frac{\sigma_t}{2};\ \omega_o - \frac{\sigma_\omega}{2} \le \omega_k \le \omega_o + \frac{\sigma_\omega}{2}$$

atunci nu s-ar putea spera ca pe baza eşantioanelor achiziţionate să se determine valoarea reprezentării timp-frecvenţă în jurul punctului $(t_o,\ \omega_o)$. Evident că ar putea fi achiziţionate şi mai multe eşantioane având coordonatele în interiorul fiecărei celule de rezoluţie. De aceea s-a vorbit mai sus de o densitate minimă de eşantionare. În consecinţă se poate afirma că eşantionarea reprezentării timp-frecvenţă de tipul transformare Fourier scurtă la densitatea minimă de eşantionare poate fi făcută alegând coordonatele eşantioanelor în centrele celulelor de rezoluţie.

În consecinţă paşii de eşantionare au valorile:

$$t_o = \sigma_t;\quad \omega_o = \sigma_\omega$$

Eşantionând în acest mod se obţine:

$$TF_x^{STFT}(n\,t_o,\ m\,\omega_o) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, w(\tau - n\,t_o)\, e^{-j\,m\,\omega_o \tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, w^*_{n\,t_o,\ m\,\omega_o}(\tau)\, d\tau$$

Relaţia de mai sus defineşte o reprezentare timp-frecvenţă discretă. Această reprezentare este descrisă de un operator definit pe $L^2(R)$ cu valori în $l^2(Z)$. În [42] se demonstrează că acest operator este inversabil şi că operatorul invers este mărginit dacă:

$$\omega_o\, t_o \le 2\pi \tag{118}$$

Expresia operatorului invers este:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle x(\tau),\ w_{m\,\omega_o, n\,t_o}(\tau) \right\rangle w_{m\,\omega_o, n\,t_o}(t) \tag{119}$$

adică:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} TF_x^{STFT}(nt_o,\ m\omega_o)\, w_{m\omega_o, nt_o}(t) \tag{120}$$

Această relaţie are două interpretări. Prima interpretare se referă la faptul că semnalul $x(t)$ poate fi reconstruit pe baza eşantioanelor reprezentării sale timp-frecvenţă de tipul transformare Fourier scurtă prelevate corespunzător unei densităţi

minime. Cea de a doua interpretare este aceea că semnalul nestaţionar, de energie finită, $x(t)$ poate fi descompus cu ajutorul mulţimii de funcţii $\left\{w_{\mathrm{m}\,\omega_o,\,\mathrm{n}t_o}(t)\right\}_{\mathrm{m}\in Z,\,\mathrm{n}\in Z}$.

Dar:

$$w_{\mathrm{m}\omega_o,\,\mathrm{n}t_o}(t) = w(t - nt_o)\, e^{-\mathrm{j}\,\mathrm{m}\,\omega_o \mathrm{t}}$$

Se observă că toate aceste funcţii pot fi generate pe baza funcţiei $w(t)$, prin translatare şi înmulţire cu exponenţiale complexe. Condiţia (118) care se poate rescrie în forma:

$$\sigma_t\,\sigma_\omega \le 2\pi$$

exprimă necesitatea ca fereastra temporală folosită, $w(t)$, să aibă o bună localizare în planul timp-frecvenţă. De aceea se poate afirma că funcţiile $w_{\mathrm{m}\omega_o,\,\mathrm{n}t_o}(t)$ reprezintă atomi timp-frecvenţă.

Relaţia (120) descrie o posibilitate simplă de analiză timp-frecvenţă a semnalului $x(t)$. Pentru a face această analiză este suficient să se identifice valorile semnificative ale coeficienţilor $\mathrm{TF}_x^{\mathrm{STFT}}\left(nt_o,\, m\omega_o\right)$. Acestea specifică zonele din planul timp-frecvenţă în care semnalul $x(t)$ are componente semnificative.

E clar că eşantionarea cea mai eficientă corespunde cazului:

$$\omega_o\, t_o = 2\pi$$

Ar fi foarte bine ca să se poată îndeplini această condiţie şi ca în acelaţi timp mulţimea $\left\{w_{\mathrm{m}\omega_o,\,\mathrm{n}t_o}(t)\right\}_{\mathrm{m}\in Z,\,\mathrm{n}\in Z}$ să reprezinte o bază ortonormală a spaţiului $\mathrm{L}^2(R)$. În acest mod reprezentarea (120) ar fi complet neredundantă. De exemplu, dacă se consideră fereastra temporală:

$$w(t) = \chi_{1/2}(t) = \sigma\left(t + \frac{1}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

se poate construi mulţimea: $\left\{e^{\mathrm{j}\,\mathrm{m}2\pi\tau}\,\chi_{\left[\mathrm{n}-\frac{1}{2},\,\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right]}(\tau)\right\}_{\mathrm{m}\in Z,\,\mathrm{n}\in Z}$, care este o bază ortonormală a spaţiului $\mathrm{L}^2(R)$, [42].

Se observă că în acest caz:

$$t_o = 1,\ \omega_o = 2\pi$$

Din păcate fereastra temporală dreptunghiulară nu are o localizare suficient de bună în planul timp-frecvență:

$$\sigma_t \, \sigma_\omega = \infty$$

Deci această fereastră temporală nu îndeplineşte condiţiile pentru ca reprezentările timp-frecvență de tip transformare Fourier scurtă care o folosesc să poate fi eşantionate eficient (complet neredundant) în scopul reconstrucţiei semnalului de analizat. De fapt există o teoremă care arată că cele trei condiţii:

- $\omega_o \, t_o = 2\pi$,
- $\left\{ w_{m\,\omega_o,\, n\,t_o}(t) \right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ - bază ortonormală a lui $L^2(R)$,
- $w(t)$ bine localizată în planul timp-frecvență (în aşa fel încât să se poată alege $t_o = \sigma_t$ şi $\omega_o = \sigma_\omega$),

sunt contradictorii.

Enunţul acestei teoreme , conform [59], este:

Teorema Balian-Low Nu există nici o fereastră temporală care să aibă o localizare bună în timp şi în frecvenţă şi care să genereze o mulţime $\left\{ w_{m\omega_o,\, nt_o}(\tau) \right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$, bază ortonormală a lui $L^2(R)$, dacă:

$$\omega_o \, t_o = 2\pi$$

De fapt acele funcţii $w(\tau)$ care pot genera baze ortonormale ale lui $L^2(R)$ au produsul $\sigma_t \sigma_\omega$ infinit.

În sfârşit, paşii de eşantionare ar trebui aleşi astfel încât să fie îndeplinită condiţia:

$$\omega_o \, t_o < 2\pi$$

Ţinând seama de condiţiile:

$$t_o = \sigma_t \; ; \quad \omega_o = \sigma_\omega ,$$

şi de principiul incertitudinii rezultă condiţia:

$$\frac{\pi}{2} \le \omega_o \, t_o < 2\pi$$

Deci pentru reconstrucția semnalului $x(t)$ este necesară eşantionarea redundantă a reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă. De altfel nici în cazul eşantionărilor redundante ($\omega_o\, t_o < 2\pi$), condiția ca mulțimea $\left\{w_{m\omega_o,\, nt_o}(\tau)\right\}_{m\in Z,\, n\in Z}$ să fie o bază ortogonală a lui $L^2(R)$ nu poate fi verificată decât de ferestre temporale cu, [42] :

$$\sigma_t\, \sigma_\omega = \infty$$

Această obstrucție datorată teoremei Balian-Low poate fi evitată dacă se renunță la constrângerea ca $w_{m\omega_o,\, nt_o} = w(t - n\, t_o)\, e^{-j\, m\, \omega_o t}$ şi dacă exponențiala se înlocuieşte cu o funcție trigonometrică. Procedând în acest mod Coifman şi Meyer au construit bazele sinusoidale şi cosinusoidale localizate ale spațiului $L^2(R)$, [96]. Elementele acestor baze sunt numite "funcțiile wavelet" ale lui Malvar, în onoarea lui Malvar care a introdus aceste funcții într-un cadru diferit (compresia semnalelor) în articolul său [93]. Ideea bazelor trigonometrice localizate au fost reluată şi dezvoltată de către Mladen Wickerhauser în cartea sa [145].

Dacă se renunță la pretenția că mulțimea $\left\{w_{m\omega_o,\, nt_o}(\tau)\right\}_{m\in Z,\, n\in Z}$ să reprezinte o bază ortonormală atunci se poate lucra într-un cadru mai general dat de teoria cadrelor (frame în limba engleză). Această teorie, elaborată de R.J. Duffin şi A.C. Schaeffer, [54], este folosită de Ingrid Daubechies în cartea sa [42] pentru a studia discretizarea reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă. În această lucrare se lucrează în ipoteza că mulțimea $\left\{w_{m\,\omega_o,\, n\,t_o}(\tau)\right\}_{m\in Z,\, n\in Z}$ are structură de cadru. În continuare se prezintă câteva rezultate remarcabile ale teoriei cadrelor.

Definiție Mulțimea de funcții $\left\{g_n(\tau)\right\}_{n\in Z}$, elemente ale spațiului Hilbert H, se numeşte cadru, dacă există două constante A şi B cu $0 < A \le B < \infty$, astfel încât pentru fiecare f din H să fie îndeplinită condiția:

$$A\,\|f\|^2 \le \sum_{n\,=\,-\infty}^{\infty} \left|\langle f,\, g_n\rangle\right|^2 \le B\,\|f\|^2$$

Constantele A şi B se numesc marginile cadrului.

Dacă: A = B atunci este vorba despre un cadru îngust ("tight frame" în limba engleză). O bază ortogonală este un cadru îngust cu: A = B = 1.
Reciproca nu este însă valabilă. Nu orice cadru îngust cu marginile unitare este o bază ortogonală.

Dacă mulțimea $\{g_n(\tau)\}_{n \in Z}$ este un cadru şi dacă elementele sale sunt liniar independente atunci această mulțime se numeşte bază Riesz. Orice cadru este o mulțime completă.

Orice bază Riesz poate fi transformată într-o bază ortogonală prin procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt [39].

În cazul unui cadru îngust, oricare ar fi elementul f din H, se poate scrie:

$$\sum_{j \in J} \left| \langle f, g_j \rangle \right|^2 = A \|f\|^2 \tag{122}$$

Mai mult, orice element din H poate fi exprimat ca şi combinație liniară de elemente ale cadrului îngust, în forma:

$$f = A^{-1} \sum_j \langle f, g_j \rangle g_j \tag{123}$$

Această formulă este foarte asemănătoare cu cea de descompunere a semnalului f într-o bază ortogonală a spațiului H. Totuşi trebuie remarcat că din punct de vedere al transmiterii informației există o deosebire fundamentală între descompunerea într-o bază ortogonală şi descompunerea într-un cadru îngust. Şi anume, în comparație cu descompunerea într-o bază orotgonală descompunerea într-un cadru îngust este redundantă. Această comportare se datoreşte faptului că elementele unui cadru îngust nu sunt ortogonale între ele. Condiția de ortogonalitate:

$$\langle g_j, g_k \rangle = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & in\ rest \end{cases}$$

asigură independența informației conținute în elementele g_j şi g_k dacă $j \neq k$. Datorită acestui fapt descompunerea într-o bază ortogonală poate fi considerată neredundantă. Partea din informația asociată lui f conținută în g_j este descrisă doar de coeficientul $\langle f, g_j \rangle$. În cazul descompunerii într-un cadru îngust partea din informația asociată lui f conținută în g_j este descrisă de mai mulți coeficienți ai descompunerii.

Oricărui cadru din H i se poate asocia un operator, numit operator al cadrului şi notat cu F. Acesta este un operator liniar care asociază spațiul H spațiul $l^2(J)$ cu:

$$l^2(J) = \left\{ c = \{c_j\}_{j \in J} \; ; \; \|c\|^2 = \sum_{j \in J} |c_j|^2 < \infty \right\}$$

şi care este definit prin:

$$\left(\mathrm{F}f\right)_{\mathrm{j}} = \left\langle f, g_{\mathrm{j}} \right\rangle$$

Acest operator este mărginit:

$$(\forall) f \in \mathrm{H}\,; \quad \| \mathrm{F}f \|^2 \leq \mathrm{B} \| f \|^2$$

Operatorul adjunct lui F se notează cu F* şi se exprimă pe baza relației:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{c}}^{*} = \sum_{\mathrm{j} \in \mathrm{J}} c_{\mathrm{j}} g_{\mathrm{j}}$$

Prin compunerea operatorilor F* şi F se obține operatorul F*F care este inversabil. Inversul operatorului F*F se va nota cu $(\mathrm{F}^*\mathrm{F})^{-1}$.

Făcând notația:

$$\tilde{g}_{\mathrm{j}} = \left(\mathrm{F}^{*}\mathrm{F}\right)^{-1} g_{\mathrm{j}}$$

se obține mulțimea:

$$\left\{\tilde{g}_{\mathrm{j}}\right\}_{\mathrm{j} \in \mathrm{J}}$$

Şi această mulțime are structură de cadru cu constantele B^{-1} şi A^{-1}. Operatorul acestui cadru se notează cu $\tilde{\mathrm{F}}$. În [42] se demonstrează că acest operator are următoarele proprietăți:

1 $\tilde{\mathrm{F}} = \mathrm{F}\left(\mathrm{F}^{*}\mathrm{F}\right)^{-1}$

2 $\tilde{\mathrm{F}}^{*}\tilde{\mathrm{F}} = \left(\mathrm{F}^{*}\mathrm{F}\right)^{-1}$

3 $\tilde{\mathrm{F}}^{*}\mathrm{F} = \mathrm{F}^{*}\tilde{\mathrm{F}} = \mathrm{I}d$

4 $\tilde{\mathrm{F}}\,\mathrm{F}^{*} = \mathrm{F}\,\tilde{\mathrm{F}}^{*}$

unde cu Id s-a notat operatorul identitate.

Propietatea 3 permite exprimarea oricărui element f al lui H şi cu ajutorul cadrului $\left\{\tilde{g}_{\mathrm{j}}\right\}_{\mathrm{j} \in \mathrm{J}}$:

$$\sum_{j \in J} \left\langle f, g_j \right\rangle \tilde{g}_j = f = \sum_{j \in J} \left\langle f, \tilde{g}_j \right\rangle g_j \tag{124}$$

De aceea cadrul $\left\{ \tilde{g}_j \right\}_{j \in J}$ este numit cadru dual al cadrului $\left\{ \tilde{g}_j \right\}_{j \in J}$.

În consecință pentru dezvoltarea semnalului f într-un cadru este necesară atât cunoaşterea elementelor acestui cadru cât şi cunoaşterea cadrului dual. De aceea relația (124) nu este eficientă din punct de vedere al volumului de calcul pe care îl implică. Ar fi mai utilă o relație de descompunere de forma:

$$\sum_{j \in J} \left\langle f, g_j \right\rangle g_j$$

asemănătoare cu cea din cazul cadrelor înguste (relația (123)).

În [42] se demonstrează că dacă marginile cadrului A şi B sunt suficient de apropiate:

$$r = \frac{B}{A} - 1 << 1$$

atunci e valabilă descompunerea:

$$f = \frac{2}{A + B} \sum_{j \in J} \left\langle f, g_j \right\rangle g_j + Rf \tag{125}$$

unde operatorul rest R este definit prin:

$$R = Id - \frac{2}{A + B} F^* F$$

Dacă constanta r este de valoare mică atunci eroarea medie pătratică de aproximare a lui f obținută prin înlăturarea termenului Rf din membrul drept al relației (125) este de valoare $\frac{r}{2 + r} \|f\|$.

În consecință poate fi utilizată pentru descompunere formula aproximativă:

$$f \cong \frac{2}{A + B} \sum_{j \in J} \left\langle f, g_j \right\rangle g_j \tag{125'}$$

În continuare se aplică rezultatele enunțate anterior la studiul discretizării reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă. Întrebările care se pun în acest caz sunt:

- Pentru ce alegeri ale lui $w(t)$, ω_o şi t_o poate fi caracterizată o funcție pe baza produselor $\left\langle f,\ w_{m\omega_o,\ nt_o} \right\rangle$?

- Când este posibil să se descompună f , pe baza unui algoritm stabil, din aceste produse scalare ?

Răspunsul la aceste întrebări rezultă din condițiile care trebuiesc impuse pentru ca mulțimea $\left\{ w_{m\omega_o,\ nt_o}(\tau) \right\}_{m \in Z,\ n \in Z}$ să aibă structură de cadru.

În continuare se va folosi notația:

$$w_{m,\ n}(\tau) = w_{m\omega_o,\ nt_o}(\tau)$$

Mulțimea $\left\{ w_{m,\ n}(\tau) \right\}_{m \in Z,\ n \in Z}$ constituie un cadru , dacă există constantele strict pozitive A şi B astfel încât:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \le \sum_{m,\ n} \left| \left\langle f,\ w_{m,\ n} \right\rangle \right|^2 \le B \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Dacă această condiție este îndeplinită, atunci orice semnal de energie finită, $f(t)$, poate fi descompus în forma:

$$f = \sum_{m,\ n} \left\langle f,\ w_{m,\ n} \right\rangle \tilde{w}_{m,\ n} = \sum_{m,\ n} \left\langle f,\ \tilde{w}_{m,\ n} \right\rangle w_{m,\ n} \qquad (126)$$

Se poate demonstra că pentru ca mulțimea $\left\{ w_{m,\ n}(\tau) \right\}_{m \in Z,\ n \in Z}$ să aibă o structură de cadru este necesar ca să fie satisfăcută condiția:

$$A \le \frac{2\pi}{\omega_o\ t_o} \|w\|^2 \le B$$

sau, ținând seama de faptul că fereastra temporală este de energie unitară:

$$A \le \frac{2\pi}{\omega_o\ t_o} \le B$$

Dacă ar fi vorba despre un cadru îngust (A = B = 1) atunci ar fi necesar ca: $\omega_o\ t_o = 2\pi$.

Dar conform teoremei Balian-Low (extinsă la cadre) ferestrele temporale care conduc la cadre înguste la care se respectă această condiție nu sunt bine localizate în planul timp-frecvență.

Condiția:

$$\omega_o \, t_o > 2\pi$$

ar conduce la reconstrucția lacunară a semnalului $f(t)$.

Pentru

$$\omega_o \, t_o < 2\pi$$

mulțimea $\left\{ w_{m,\,n}(\tau) \right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ poate fi un cadru, ba chiar un cadru îngust, generat de ferestre temporale $w(t)$ cu o bună localizare în planul timp-frecvență. Exemplele de ferestre temporale care satisfac aceste condiții sunt prezentate în [42]. Va fi reluat în continuare doar exemplul ferestrei temporale Gaussiene având în vedere poziția privilegiată a acestei ferestre (ea conduce la reprezentarea timp-frecvență de tip Gabor):

$$w(\tau) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \, e^{-\frac{\tau^2}{2}}$$

În următorul tabel sunt prezentate valorile marginilor cadrului generat pentru diferite valori ale pasului t_o, în cazul $\omega_o \, t_o = \frac{\pi}{2}$.

t_o	A	B
0,5	1,221	7,091
1	3,854	4,147
1,5	3,899	4,101
2,0	3,322	4,679
2,5	2,365	5,664
3,0	1,427	6,772

Deci, semnalul $x(t)$ poate fi analizat pe baza eşantioanelor reprezentării sale timp-frecvență de tip transformare Fourier scurtă. Pornind de la aceste eşantioane semnalul poate fi reconstruit. În figura 2.7.1.1 este prezentat un sistem de analiză şi reconstrucție al semnalului $x(t)$ bazat pe utilizarea reprezentării sale timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă.

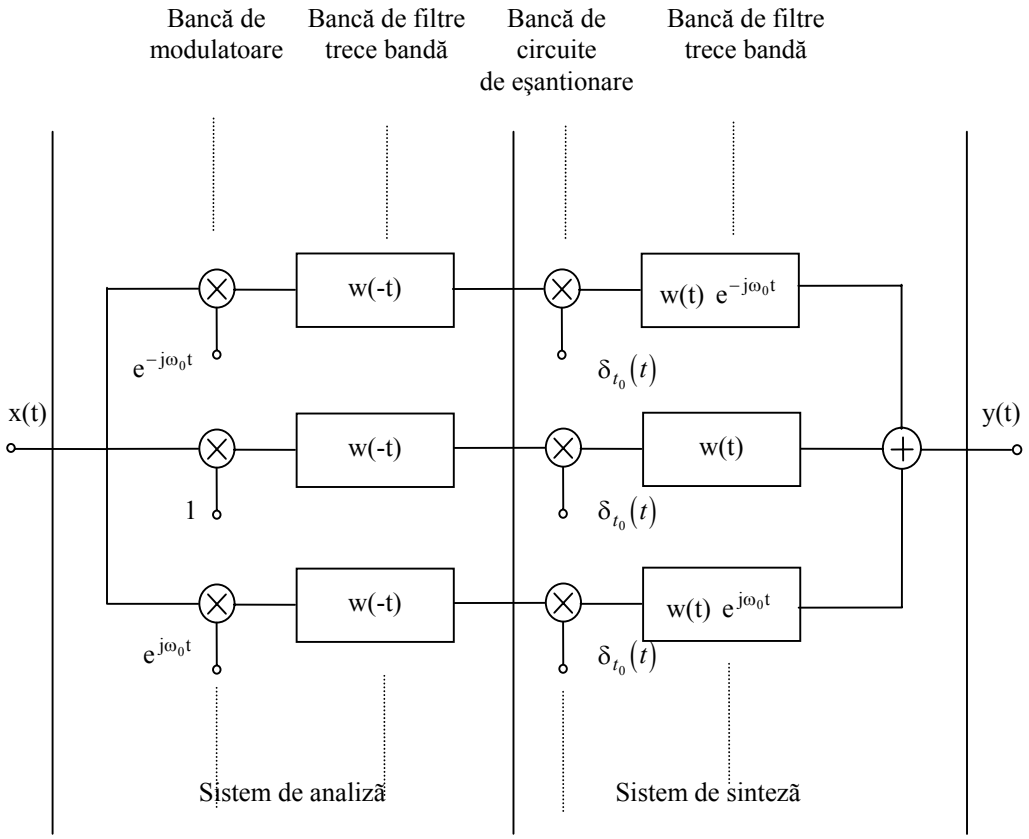


Figura 2.7.1.1 Sistem de analiză şi sinteză a semnalelor de energie finită bazat pe utilizarea reprezentării timp-frecvenţă de tipul transformare Fourier scurtă.

Principalul dezavantaj al sistemului prezentat în figura anterioară este că el necesită un număr infinit de blocuri. Acest dezavantaj dispare dacă se analizează un semnal a cărui energie se localizează aproape în totalitate într-un anumit interval timp-frecvenţă $\left[-T_o,\ T_o\right] \times \left[-\Omega_o,\ \Omega_o\right]$. În acest caz numărul de circuite din figura anterioară poate fi finit. Acest fapt poate fi reformulat în forma următoarei teoreme prezentată în [42]:

Dacă funcţiile $w_{m,\,n}(\tau) = e^{j\,m\,\omega_o\tau}\, w(\tau - n\,t_o)$ sunt elementele unui cadru de margini A şi B şi dacă fereastra temporală $w(\tau)$ satisface condiţiile:

$$|w(\tau)| \le C\left(1 + \tau^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}},\quad |F\{w(\tau)\}(\omega)| \le C\left(1 + \omega^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

cu $\alpha > 1$, atunci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există constantele pozitive t_ε şi ω_ε, astfel încât oricare ar fi semnalul $x(\tau)$ din $L^2(R)$ şi oricare ar fi constantele T_o şi Ω_o să aibă loc relaţiile:

$$\left\| x(\tau) - \sum_{\substack{|m\,\omega_o| \le \Omega_0+\omega_\varepsilon \\ |n\,t_o| \le T_o + t_\varepsilon}} \left\langle x,\, w_{n,\,m} \right\rangle \widetilde{w}_{n,\,m} \right\| \le \sqrt{\frac{B}{A}} \left[\left(\int_{|\tau| > T_o} |x(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} + \left(\int_{|\omega| > \Omega_o} \left| F\{x(\tau)\}(\omega) \right|^2 d\omega \right)^{1/2} + \varepsilon \|f\| \right] \tag{128}$$

E clar că dacă semnalul $x(\tau)$ se localizează, aproape în întregime în intervalul $[-T_o,\, T_o] \times [-\Omega_o,\, \Omega_o]$ atunci valorile integralelor:

$$\int_{|\tau| > T_o} |x(\tau)|^2 d\tau \quad \text{şi} \quad \int_{|\omega| > \Omega_o} |X(\omega)|^2 d\omega$$

sunt foarte mici. Cum şi ε poate fi oricât de mic rezultă că semnalul $x(\tau)$ poate fi aproximat oricât de bine în medie pătratică de suma:

$$\sum_{\substack{|m\,\omega_o| \le \Omega_o + \omega_\varepsilon \\ |n\,t_o| \le T_o + t_\varepsilon}} \left\langle x,\, w_{m,n} \right\rangle \widetilde{w}_{m,\,n}$$

Această teoremă este foarte utilă deoarece asigură aproximarea cu o calitate foarte bună a oricărui semnal de energie finită localizat aproape în întregime într-un domeniu din planul timp-frecvenţă printr-o sumă (nu serie) de atomi timp-frecvenţă.
Interpretarea grafică a teoremei enunţate mai sus este prezentată în figura 3.7.1.1.

În finalul acestui paragraf , se revine pe scurt la cazul bazelor ortogonale. S-a afirmat mai devreme că dacă se renunţă la constrângerea ca:

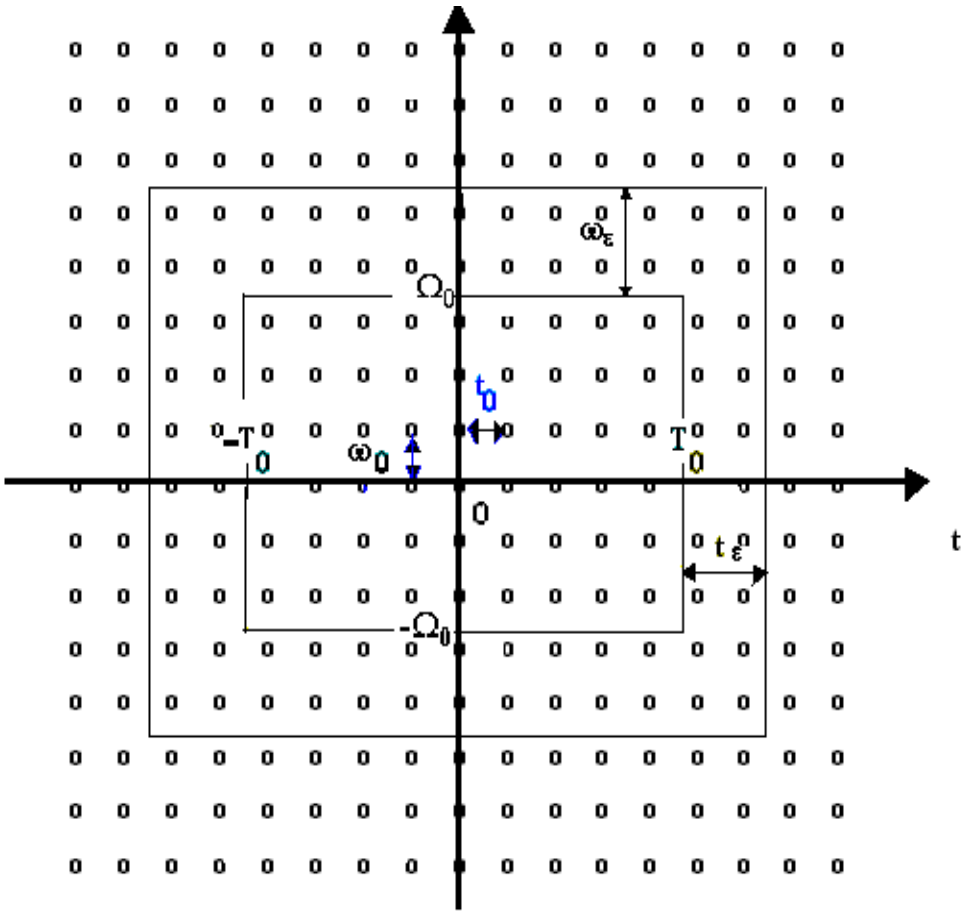


Figura 3.7.1.1 Mulţimea punctelor de eşantionare a reprezentării timp-frecvenţă de tipul transformare Fourier scurtă, necesare pentru reconstrucţia semnalului $x(t)$ care este aproape perfect localizat în domeniul $[-T_o, T_o] \times [-\Omega_o, \Omega_o]$.

$$w_{m,n}(t) = w(t - n\,t_o)\, e^{-j\,m\,\omega_o t}$$

şi că dacă exponenţiala se înlocuieşte cu o funcţie cosinusoidală sau sinusoidală atunci funcţiile $w_{m,n}(\tau)$ devin elementele unei baze ortonormale şi au o bună localizare în planul timp-frecvenţă chiar şi în cazul: $\omega_o\, t_o = 2\pi$

În continuare se prezintă definiţia funcţiilor "wavelet" ale lui Malvar aşa cum se găseşte aceasta în [96].

Se porneşte de la un şir crescător a_m de numere reale cu proprietăţile:

$$\lim_{m \to -\infty} a_m = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{m \to \infty} a_m = +\infty$$

Se notează:

$$l_m = a_{m+1} - a_m$$

şi se definesc numerele pozitive η_m cu condiţia:

$$\eta_m + \eta_{m+1} \le l_m$$

Atunci, intervalele $[a_m - \eta_m,\ a_m + \eta_m]$ sunt disjuncte două câte două. Ferestrele $w_m(\tau)$ sunt construite astfel încât să furnizeze o variantă netezită a funcţiilor indicatoare ale intervalelor $[a_m, a_{m+1}]$. Se impun condiţiile:

1. $0 \le w_m(\tau) \le 1$
2. $w_m(\tau) = 1$, dacă $a_m + \eta_m \le \tau \le a_{m+1} - \eta_{m+1}$
3. $w_m(\tau) = 0$, dacă $a_m - \eta_m \ge \tau$ sau dacă $\tau \ge a_{m+1} + \eta_{m+1}$.
4. $w_m(a_m + \tau) = w_{m-1}(a_m - \tau)$, dacă $|\tau| \le \eta_m$
5. $w_m^2(a_m - t) + w_m^2(a_m + t) = 1$, dacă $|\tau| \le \eta_m$

Se definesc funcţiile "wavelet" ale lui Malvar prin:

$$u_{m,n}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{l_m}}\, w_m(\tau) \cos\left[\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\tau - a_m}{l_m}\right] \qquad (129)$$

Se observă înlocuirea exponenţialei complexe din produsul din membrul drept cu funcţia cosinusoidală. În referinţa bibliografică anterior citată este demonstrată următoarea teoremă : "Şirul $u_{m,n}(\tau)$ reprezintă o bază ortonormală a spaţiului $L^2(R)$".

Exemple de funcţii $w_m(\tau)$, modul lor de construcţie precum şi aplicaţii ale funcţiilor "wavelet" de tip Malvar sunt prezentate în [145].

7.1.2 DISCRETIZAREA REPREZENTĂRII DE TIP "WAVELET"

Localizarea în timp a acestei reprezentări depinde de durata funcției generatoare $\psi(\tau)$, $_t\sigma$ și de valoarea factorului de scară s iar localizarea în frecvență depinde de banda funcției generatoare $_\omega\sigma$ și de valoarea factorului de scară s. De aceea se poate afirma că în cazul acestei reprezentări celula de rezoluție este: $\left[t - \frac{_t\sigma}{2s}, t + \frac{_t\sigma}{2s}\right] \times \left[\omega - s\,\frac{_\omega\sigma}{2}, \omega + s\,\frac{_\omega\sigma}{2}\right]$. Dacă este vorba despre reprezentarea timp-frecvență de tipul "wavelet" atunci:

$$s = \frac{\omega}{\omega_o}$$

unde ω_o reprezintă pulsația centrală a răspunsului în frecvență al filtrului cu răspunsul la impuls $\psi(\tau)$. În continuare se va considera pentru comoditate că:

$$\omega_o = 1$$

În consecință se constată că aria celulei de rezoluție este egală cu:

$$\frac{_t\sigma}{s}\, s_\omega\sigma = {}_t\sigma\ {}_\omega\sigma$$

adică, aria este independentă de s (sau ω).

Fie ω_o' respectiv ω_1 centrele a două celule de rezoluții învecinate. Se presupune că:

$$\omega_1 = a_o\ \omega_o'$$

Lățimile de bandă ale celor două celule de rezoluție sunt: $\sigma_{\omega_0'}$ și σ_{ω_1}. Ținând seama de faptul că acestea reprezintă benzile de trecere a două filtre care au același factor de calitate se poate scrie:

$$\frac{\omega_0'}{\sigma_{\omega_0'}} = \frac{\omega_1}{\sigma_{\omega_1}}$$

adică:

$$\frac{\omega_0'}{\sigma_{\omega_0'}} = \frac{a_o\omega_0'}{\sigma_{\omega_1}}$$

de unde rezultă că:

$$\sigma_{\omega_1} = a_o\sigma_{\omega_0'} \qquad (130)$$

Având în vedere invarianța ariei celulei de rezoluție şi notând cu σ_{t_o} şi σ_{t_1} duratele celor două celule de rezoluție în discuție se poate scrie:

$$\sigma_{t_o}\sigma_{\omega_o} = \sigma_{t_1}\sigma_{\omega_1}$$

de unde rezultă că:

$$\sigma_{t_1} = \frac{\sigma_{t_0}}{a_o} \qquad (131)$$

Acoperirea planului timp-frecvență cu astfel de celule de rezoluție (pentru $a_o = 2$) este prezentată în figura 1.7.1.2.

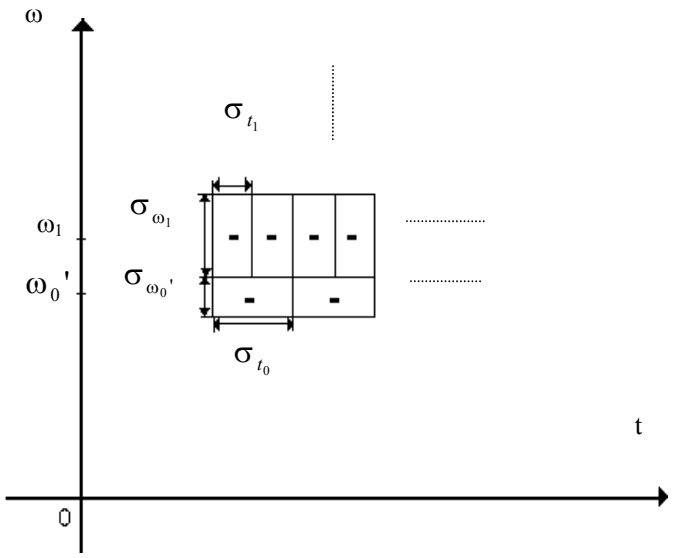


Figura 1.7.1.2. Acoperirea planului cu celulele de rezoluție în cazul reprezentării timp-frecvență de tip "wavelet".

Trebuie remarcat că o astfel de acoperire impune o condiție suplimentară asupra funcției "wavelet" generatoare.

Într-adevăr, având în vedere că distanța dintre coordonatele centrelor a două celule vecine (pe verticală) este:

$$\omega_1 - \omega_0' = \frac{\sigma_{\omega_0'}}{2} + \frac{\sigma_{\omega_1}}{2}$$

şi ținând seama de relațiile de mai sus, se poate scrie:

$$\omega_0'(a_o - 1) = \frac{\sigma_{\omega_0'}}{2}(a_o + 1)$$

sau:

$$\frac{\omega_0'}{\sigma_{\omega_0'}} = \frac{(a_o + 1)}{2(a_o - 1)} \tag{132}$$

În consecință rezultă că valoarea factorului de calitate al filtrului cu răspunsul în frecvență $F\{\psi(t)\}(\omega)$ este fixată. La fel şi în cazul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă şi în cazul reprezentării timp-frecvență de tip "wavelet" se poate vorbi despre o densitate minimă de eşantionare.

Aceasta se obține şi de această dată dacă coordonatele punctelor în care se eşantionează sunt tocmai coordonatele centrelor celulelor de rezoluție (din figura 1.7.1.2).

Legea care descrie repartiția acestor puncte în domeniul frecvență este:

$$\omega_m = a_o \omega_{m-1} = a_o^m \omega_0'$$

Legea care descrie repartiția acestor puncte în domeniul timp este:

$$t_n = n a_o^{-m} t_o$$

Se constată că este vorba despre o eşantionare neuniformă.

De aceea, întrebările:

Este posibilă reconstrucția funcției $TF_x^{CWT}(t, \omega)$ pe baza eşantioanelor $TF_x^{CWT}(\omega_m, t_n)$?

În ce condiții ?"

sunt foarte interesante şi actuale.

În continuare urmând aceeaşi cale ca şi în cazul discretizării reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă se va studia modul în care poate fi reconstruit semnalul $x(\tau)$ din eşantioanele reprezentării sale de tip "wavelet". În acest scop în [42] se studiază cadrele de tip "wavelet". În continuare se prezintă pe scurt rezultatele obținute în această lucrare. Se face notația:

$$\psi_{m,\,n}(\tau) = a_o^{-\frac{m}{2}}\ \psi\left(a_o^{-m}\tau - n\,t_o\right) \tag{133}$$

Următoarea teoremă arată condițiile pe care trebuie să le îndeplinească funcția "wavelets mother", $\psi(\tau)$ pentru ca mulțimea $\left\{\psi_{m,\,n}(\tau)\right\}_{m\,\in\,Z,\,n\,\in\,Z}$ să aibă o structură de cadru.

Teoremă Dacă $\left\{\psi_{m,\,n}(\tau)\right\}_{m\,\in\,Z,\,n\,\in\,Z}$ constituie un cadru pentru $L^2(R)$ cu marginile A şi B atunci:

$$\frac{t_o \ln a_o}{2\pi}\ A \le \int_0^{\infty} \frac{\left|\ F\left\{\psi(\tau)\right\}(\omega)\right|^2}{\omega}\,d\omega \le \frac{t_o \ln a_o}{2\pi}\ B$$

şi: (134)

$$\frac{t_o \ln a_o}{2\pi}\ A \le \int_{-\infty}^{0} \frac{\left|\ F\left\{\psi(\tau)\right\}(\omega)\right|^2}{|\omega|}\,d\omega \le \frac{t_o \ln a_o}{2\pi}\ B$$

Se observă similitudinea dintre condiția de admisibilitate a funcției "wavelets mother" din relația (83') din paragraful 5.1 şi condițiile de admisibilitate din enunțul teoremei de mai sus. Diferența dintre cele două forme ale condiției de admisibilitate provine din faptul că în cazul teoremei de mai sus sunt considerate doar dilatări pozitive ale funcției $\psi(\tau)$, deoarece:

$$a_o^m > 0, \quad (\forall)\ m \in Z$$

Din acest motiv sunt disociate în formula (134) domeniile frecvențelor pozitive şi negative. Dacă s-ar fi considerat şi dilatări negative, atunci cele două condiții de admisibilitate ((83') şi (134)) ar fi fost identice. În continuarea acestui paragraf se va presupune că se lucrează cu funcții $\psi(\tau)$ admisibile. Nu orice alegere a tripletului $\left(\psi,\ a_o,\ t_o\right)$ conduce la un cadru de funcții "wavelet", chiar dacă funcția $\psi(\tau)$ este admisibilă.

Chiar dacă se face o alegere corectă mai rămâne problema determinării marginilor cadrului.

Următoarea propoziție este utilă în elucidarea chestiunilor menționate mai sus.

Propoziție Dacă ψ şi a_o sunt astfel încât:

$$\inf_{1 \le |\omega| \le a_o} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| F\{\psi\}\left(a_o^m \omega\right)\right|^2 > 0$$

$$\sup_{1 \le |\omega| \le a_o} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| F\{\psi\}\left(a_o^m \omega\right)\right|^2 < \infty \tag{135}$$

şi dacă:

$$\beta(s) = \sup_{\omega} \sum_{m} \left| F\{\psi\}\left(a_o^m \omega\right) F\{\psi\}\left(a_o^m \omega + s\right)\right|$$

descreşte cel puțin la fel de repede ca şi funcția:

$$(1 + |s|)^{-(1+\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0$$

atunci există o valoare ${}_M t_o$ astfel încât $\left\{\psi_{m,n}(\tau)\right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ să reprezinte un cadru pentru orice alegere a lui t_o cu $t_o < {}_M t_o$. Pentru t_o astfel ales marginile cadrului sunt:

$$A = \frac{2\pi}{t_o} \inf_{1 \le |\omega| \le a_o} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| F\{\psi\}\left(a_o^m \omega\right)\right|^2 \right\} - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \ne 0}}^{\infty} \sqrt{\beta\left(\frac{2\pi}{t_o} k\right) \beta\left(-\frac{2\pi}{t_o} k\right)}$$

$$B = \frac{2\pi}{t_o} \sup_{1 \le |\omega| \le a_o} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| F\{\psi\}\left(a_o^m \omega\right)\right|^2 \right\} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \ne 0}}^{\infty} \sqrt{\beta\left(\frac{2\pi}{t_o} k\right) \beta\left(-\frac{2\pi}{t_o} k\right)}$$

În scopul reconstrucției semnalului $x(\tau)$ pe baza unui cadru de funcții "wavelet" este necesară cunoaşterea cadrelor $\left\{\psi_{m,n}(\tau)\right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ şi $\left\{\tilde{\psi}_{m,n}(\tau)\right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$. În continuare se prezintă câteva exemple de cadre de funcții "wavelet".

Exemplul 1. Pălăria mexicană Este derivata de ordinul II al unei Gaussiene, normată în aşa fel încât să aibă energie unitară:

$$\psi(\tau) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \left(1-\tau^2\right) e^{-\tau^2/2} \tag{136}$$

Dacă se roteşte graficul funcţiei $\psi(\tau)$ în jurul axei sale de simetrie se obţine o suprafaţă care seamănă cu o pălărie mexicană. În tabelul 1.7.1.2 sunt prezentate valorile marginilor cadrului $\left\{\psi_{m,\,n}(\tau)\right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ pentru diferite valori ale lui t_o şi $a_o = 2$.

t_o	A	B
0,25	13,091	14,183
0,5	6,546	7,092
0,75	4,364	4,728
1	3,223	3,596
1,25	2,001	3,454

Tabelul 1.7.1.2 Margini de cadre de tip "wavelet" generate de pălăria mexicană.

Exemplul 2. Funcţia Gaussiană modulată

Această "wavelets mother" are expresia analitică:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \left(e^{-j\,\omega_o \tau} - e^{-\frac{\omega_o^2}{2}} \right) e^{-\frac{\tau^2}{2}} \tag{137}$$

În practică se alege:

$$\omega_o = 5$$

Fiind vorba despre o funcţie complexă rezultatul aplicării reprezentării timp-frecvență de tipul "wavelet" bazată pe utilizarea acestei funcţii semnalului $x(\tau)$ va fi de forma:

$$\left|\left\langle x,\ \psi_{m,\,n}\right\rangle\right|$$

şi

$$\arg\left\{\left\langle x,\ \psi_{m,\,n}\right\rangle\right\} \tag{138}$$

Reprezentarea $\arg\left\{\left\langle x,\ \psi_{m,\,n}\right\rangle\right\}$ este foarte utilă pentru detectarea singularităţilor conţinute în semnalul $x(\tau)$.

Evident că şi în cazul reconstrucţiei unui semnal pe baza eşantioanelor reprezentării sale timp-frecvență de tip "wavelet" se poate vorbi despre implementarea bazată pe utilizarea unui sistem compus dintr-un bloc de analiză şi unul de sinteză.

De fapt relația:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x,\ \psi_{m,n} \rangle \tilde{\psi}_{m,n}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x,\ \tilde{\psi}_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(t) \quad (138')$$

poate fi implementată cu sistemul din figura 2.7.1.2.

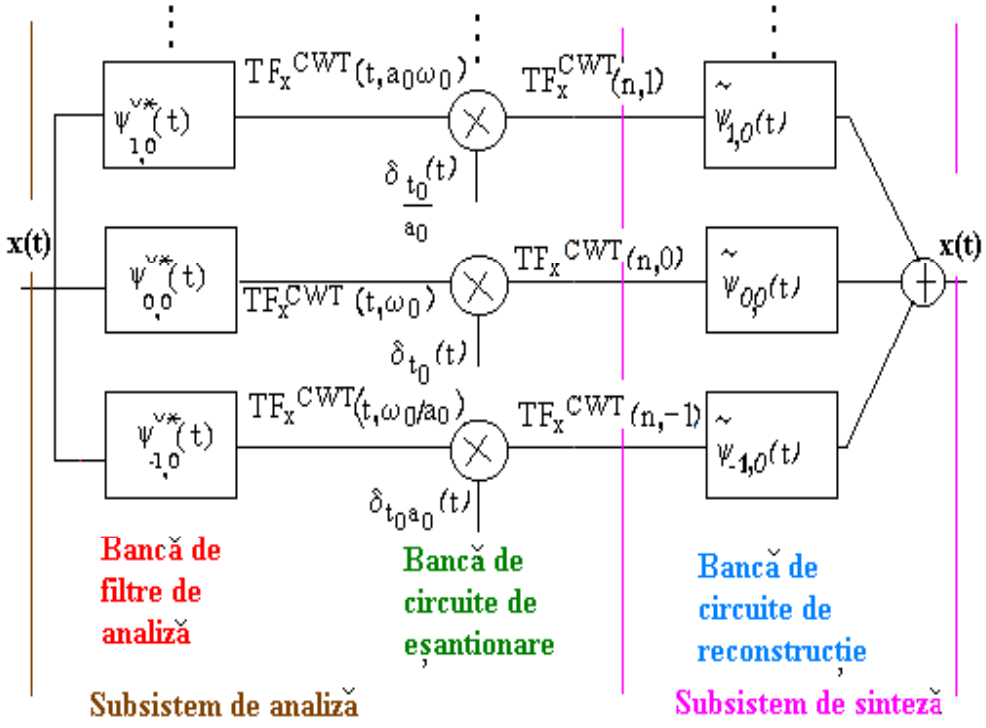


Figura 2.7.1.2 Sistem de analiză şi sinteză a semnalelor de energie finită bazat pe utilizarea reprezentării timp-frecvență de tipul wavelet.

La fel ca şi în cazul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă un astfel de sistem poate fi utilizat doar dacă în structura sa intră un număr finit de subsisteme. Această situaţie poate apărea dacă semnalul $x(t)$ este localizat aproape în întregime într-un domeniu compact al planului timp-frecvență. Acesta este motivul pentru care în [42] este demonstrată o teoremă referitoare la descompunerea în cadre a unor astfel de semnale. Această teoremă se referă la cadrele generate de funcţii

"wavelets mother", $\psi(t)$ cu proprietatea că $|\psi|$ şi $F\{\psi\}$ sunt funcții simetrice bine localizate în planul timp-frecvență.

Teoremă Fie $\{\psi_{m,n}(\tau)\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ o mulțime cu structură de cadru cu marginile A şi B generată de o funcție $\psi(\tau)$ cu proprietățile:

$$|\psi(\tau)| \le C\left(1+\tau^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad |F\{\psi(\tau)\}(\omega)| \le C|\omega|^{\beta}\left(1+\omega^2\right)^{-\frac{(\beta+\gamma)}{2}},$$

$$\alpha > 1,\ \beta > 0,\ \gamma > 1$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există o mulțime $B_\varepsilon(\Omega_o, \Omega_1, T) \subset R^2$, astfel încât pentru orice semnal de energie finită $x(t)$ să aibă loc relația:

$$\left\| x - \sum_{(m,n) \in B_\varepsilon(\Omega_o, \Omega_1, T)} \langle x, \psi_{n,m} \rangle \tilde{\psi}_{n,m} \right\| \le \sqrt{\frac{B}{A}} \left[\sqrt{\int_{\substack{|\omega| < \Omega_o \\ sau\ |\omega| > \Omega_1}} |X(\omega)|^2 d\omega} + \sqrt{\int_{|\tau| > T} |x(\tau)|^2 d\tau} + \varepsilon \|x\| \right] \tag{139}$$

Dacă semnalul $x(\tau)$ este localizat aproape total în domeniul $[-T, T] \times ([-\Omega_1, -\Omega_o] \cup [\Omega_o, \Omega_1])$ atunci primii doi termeni ai sumei din membrul drept al relației (139) au valori foarte mici. Cum şi ε poate fi oricât de mic rezultă că semnalul $x(\tau)$ poate fi aproximat în medie pătratică oricât de bine prin relația:

$$x \cong \sum_{(m,n) \in B_\varepsilon(\Omega_o, \Omega_1, T)} \langle x, \psi_{m,n} \rangle \tilde{\psi}_{m,n} \tag{140}$$

Deci în cazul în care sunt satisfăcute condițiile din teorema enunțată mai sus sistemul din figura 2.7.1.2 are un număr finit de blocuri constitutive. În acest caz el ar putea fi utilizat pentru eşantionarea cu reconstrucție perfectă a semnalului $x(t)$ (care este localizat aproape total într-un domeniu compact din planul timp-frecvență). În acest sens ar putea fi generalizată teorema de eşantionare a lui Papoulis.

De altfel sistemul din figura 2.7.1.2 este foarte sugestiv pentru legătura care există între teoria eşantionării şi teoria funcţiilor "wavelet". Printre articolele scrise pe această temă pot fi amintite [28], [29], [3], [111], [11], [70], [71], [72], [73], [74].

Interpretarea grafică a ultimei teoreme enunțate este prezentată în figura 3.7.1.2

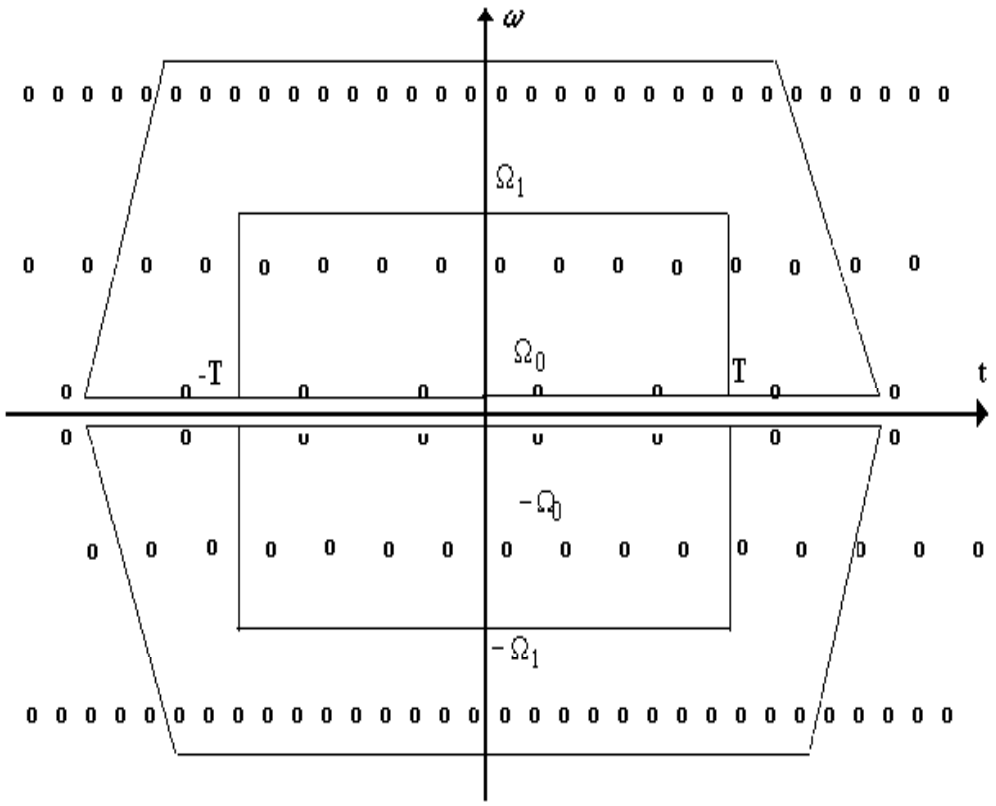


Figura 3.7.1.2 Mulțimea $B_{\varepsilon}(\Omega_o,\ \Omega_1,\ T)$ necesară pentru reconstrucția aproximativă a unui semnal aproape complet localizat în domeniul $[-T,\ T]\times([-\Omega_1,-\Omega_o]\cup[\Omega_o,\Omega_1]$ pe baza eşantioanelor reprezentării timp-frecvență de tip "wavelet" a acestui semnal.

În practică se lucrează cu valoarea 2 pentru a_o. Această valoare conduce la funcţii"wavelet" de forma:

$$\psi_{m,\,n}(\tau) = 2^{\frac{m}{2}}\psi\left(2^m\tau - n\right),\ m \in Z$$

Generarea numerică a acestor funcţii este mult uşurată de faptul că se lucrează cu puteri ale lui 2. Nu întotdeauna însă această valoare a lui a_0 conduce la o structură de cadru convenabilă pentru mulţimea $\left\{\psi_{m,\,n}(\tau)\right\}_{m\,\in Z,\,n\,\in Z}$. De aceea se prezintă în continuare o modalitate de completare a mulţimii $\left\{\psi_{m,\,n}(\tau)\right\}_{m\,\in Z,\,n\,\in Z}$ pentru a se ajunge la o structură de cadru convenabilă. Un cadru cu o astfel de structură este unul ale cărui margini satisfac condiţia:

$$\frac{B}{A} - 1 << 1$$

Această condiţie este apropiată de condiţia:

$$A = B = 1$$

care face cadrul să devină o bază ortonormală. După cum s-a arătat structura de bază ortonormală este cea mai puţin redundantă. De aceea un cadru cu structura apropiată de cea a unei baze ortonormale merită să fie utilizat.

În construcţia acestor tipuri de cadre nu se mai porneşte de la o singură "wavelets mother" ci de la mai multe. Fie acestea funcţiile ${}_1\psi,\ {}_2\psi,\ \ldots,\ {}_N\psi$. Aceste funcţii se aleg în aşa fel încât pulsaţiile la care transformatele lor Fourier au maxime să fie diferite. Ele vor trebui să fie bine localizate în frecvenţă. Procedând în acest mod se poate obţine mulţimea: $\left\{{}_\nu\psi_{m,\,n},\ m\ \in Z,\ n\ \in Z,\ \ \nu = 1,\ \ldots\ N\right\}$.

În [42] se demonstrează că această mulţime este un cadru cu structură favorabilă.

Prin analogia dintre un astfel de cadru şi o formaţie corală, acesta se mai numeşte şi cadru pe mai multe voci. Întrebarea firească este: Cum se aleg funcţiile ${}_\nu\psi(\tau)$? O posibilitate de a alege versiuni dilatate, cu factori fracţionari, ale unei singure "wavelets mother" este:

$${}_\upsilon\psi(\tau) = 2^{\frac{(\upsilon-1)}{N}}\,\psi\left(2^{\frac{(\upsilon-1)}{N}}\,\tau\right) \qquad (141)$$

Transformatele Fourier ale acestor funcţii sunt:

$$F\left\{{}_\upsilon\psi(\tau)\right\}(\omega) = 2^{\frac{(\upsilon-1)}{N}}\ \frac{1}{2^{\frac{(\upsilon-1)}{N}}}\ F\left\{\psi(\tau)\right\}\left(\frac{\omega}{2^{\frac{(\upsilon-1)}{N}}}\right)$$

adică:

$$F\left\{{}_\upsilon\psi(\tau)\right\}(\omega) = F\left\{\psi(\tau)\right\}\left(2^{-\frac{(\upsilon-1)}{N}}\,\omega\right)$$

Dacă pulsația la care funcția $F\left\{\psi(\tau)\right\}(\omega)$ este maximă este ω_c atunci pulsația la care funcția $F\left\{{}_{\upsilon}\psi(\tau)\right\}(\omega)$ este maximă este:

$$ {}_{\upsilon}\omega_c = 2^{\frac{(\upsilon-1)}{N}}\omega_c $$

Într-adevăr pulsațiile ${}_{\upsilon}\omega_c$ sunt diferite între ele. Selectivitatea funcțiilor $F\left\{{}_{\upsilon}\psi(\tau)\right\}(\omega)$ este impusă de selectivitatea funcției $F\left\{\psi(\tau)\right\}(\omega)$. Deci relația (141) poate conduce (prin alegerea judicioasă a funcției $\psi(\tau)$) la cunoaşterea unui cadru pe mai multe voci. În figura 4.7.1.2 este prezentată distribuția punctelor în care trebuie eşantionată reprezentarea timp-frecvență de tip "wavelet" pentru ca semnalul de analizat să poată fi reconstruit folosind un cadru pe mai multe voci.

Trebuie remarcat faptul că figurile 1.7.1.2, 3.7.1.2 şi 4.7.1.2 pot fi interpretate şi altfel. Folosind distribuțiile punctelor de eşantionare din aceste figuri pot fi imaginate procedee de reconstrucție aproximativă prin interpolarea bidimensională a reprezentării timp-frecvență de tip “wavelet”. În acest context, calitatea reconstrucției se înbunătățeşte cu cât creşte numărul punctelor de eşantionare utilizate. Acesta este un argument suplimentar pentru utilizarea cadrelor pe mai multe voci.

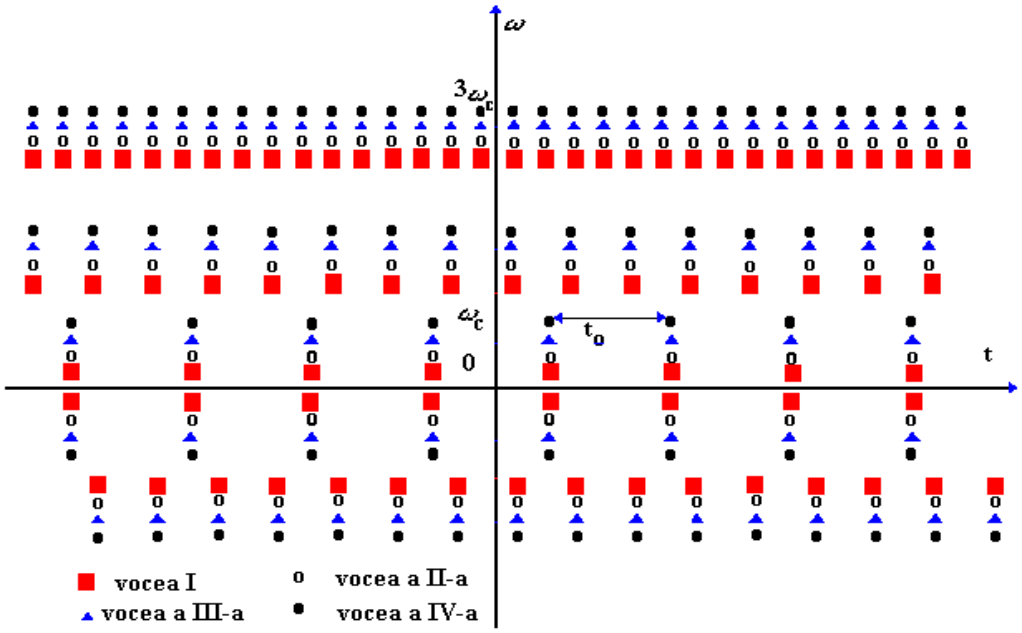


Figura 4.7.1.2 Distribuția punctelor de eşantionare ale reprezentării timp-frecvență de tip "wavelet" care permite reconstrucția semnalului de analizat cu ajutorul unui cadru pe 4 voci (pe decadă).

7.1.2.1 BAZE ORTONORMALE DE FUNCŢII "WAVELET"

După cum s-a arătat deja, analiza cea mai puţin redundantă a unui semnal de energie finită cu ajutorul atomilor timp-frecvenţă sau timp-factor de scară are loc dacă aceştia reprezintă elementele unei baze ortonormale a spaţiului $L^2(R)$. În acest paragraf se prezintă câteva exemple de baze ortonormale de funcţii "wavelet" precum şi metodele de construcţie ale unor astfel de mulţimi. Bazele ortonormale de funcţii "wavelet" sunt rezultatul unei lungi evoluţii care a început la sfârşitul secolului al XIX-lea. În anul 1873, Dubois-Raymond a dat un exemplu de funcţie continuă şi periodică cu perioada 2π a cărei serie Fourier era divergentă într-un punct dat. Această observaţie l-a condus pe A. Haar la construcţia, în anul 1909, a unei baze ortonormale foarte simplă a spaţiului $L^2_{[0,\,1]}$. El a pornit de la funcţia:

$$\psi_H(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le \tau \le \dfrac{1}{2} \\ -1, & \dfrac{1}{2} < \tau < 1 \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases}$$

Elementele bazei sale sunt funcţiile:

$$\psi_{H\,m,n}(\tau) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi_H\left(2^{-m}\tau - n\right) \quad m \in Z, n \in Z$$

Un an mai târziu, G. Faber a integrat elementele bazei Haar obţinând o bază de tip Schauder a spaţiului funcţiilor continue cu suportul $[0,1]$. Pornind de la funcţia $\psi_H(\tau)$, prin integrare se obţine funcţia:

$$\psi_F(\tau) = \begin{cases} 2\tau, & 0 \le \tau \le \dfrac{1}{2} \\ 2 - 2\tau, & \dfrac{1}{2} < \tau < 1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Elementele bazei de tip Schauder sunt funcţiile:

$$\psi_{F\,m,\,n}(\tau) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi_F\left(2^{-m}\tau - n\right)$$

Dezavantajul bazei de tip Schauder este că nu pot fi dezvoltate cu ajutorul său funcțiile discontinue. În anul 1927 profesorul Ph. Franklin de la M.I.T. a avut ideea să ortogonalizeze baza lui Faber, folosind procedeul Gram-Schimdt. În acest fel el a obținut o bază care combină avantajele bazelor de tip Haar respectiv de tip Faber [95]. Dezavantajul bazei lui Franklin este că elementele sale nu au formă explicită. S. Jafard a demonstrat în anul 1987 că elementele bazei lui Franklin sunt "aproape" funcții "wavelet". Conform aceleiaşi referințe bibliografice o funcție de tip "wavelet" are următoarea definiție.

Definiția 1.7.1.2.1. Funcția ψ de variabilă reală τ este o funcție wavelet de regularitate *r*, $r \in R$, dacă sunt satisfăcute următoarele două condiții:

1) $\left(1 + \tau^2\right)^m \psi(\tau)$ aparține spațiului Sobolev $H^r(R)$ pentru orice număr natural *m*.

2) $\left\{2^{\frac{m}{2}}\ \psi\left(2^m\tau - n\right)\right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ este o bază ortonormală a lui $L^2(R)$.

De fapt funcția ψ este numită "wavelets mother" iar funcțiile $\psi_{m,n}(\tau)$ sunt funcții "wavelet".

Funcția ψ îndeplineşte condiția de admisibilitate:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{F\left\{\psi(\tau)\right\}(\omega)}{\omega}\right| d\omega < \infty$$

Pentru ca această condiție să fie îndeplinită este necesar ca:

$$F\left\{\psi(\tau)\right\}(0) = 0$$

Funcția ψ trebuie să reprezinte răspunsul la impuls al unui filtru de tip trece bandă. Dar orice astfel de funcție are un caracter oscilant. Deoarece oscilațiile descriu propagarea undelor (wave în limba engleză) funcția ψ a fost numită "wavelet". Denumirea acestei funcții în limba franceză este "ondelette". Traducerea în limba română ar putea fi "undişoară". Având în vedere rolul generator al funcției ψ ea fost

numită "wavelets mother". După cum se va vedea în continuare există şi o funcţie "wavelets father", care se va nota cu φ. Ea mai poartă şi numele de funcţie de scară. Ea trebuie să verifice condiţia 1) din definiţia anterioară şi în plus mulţimea $\left\{ 2^{\frac{m}{2}} \varphi\left(2^m \tau - n\right) \right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ trebuie să fie o bază ortonormală a lui $L^2(R)$.

Problema care reprezintă subiectul acestui paragraf este construcţia unor funcţii $\psi(\tau)$ care să conducă la funcţiile:

$$\psi_{m,\,n}(\tau) = 2^{\frac{m}{2}} \psi\left(2^m \tau - n\right) \tag{142}$$

cu proprietatea că mulţimea $\left\{\psi_{m,\,n}(\tau)\right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ este o bază ortonormală a lui $L^2(R)$. În continuare se vor prezenta câteva astfel de funcţii în ordine istorică. Elementele mulţimii $\left\{\psi_{m,\,n}(\tau)\right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ trebuie să fie ortonormale:

$$\left\langle \psi_{m,\,n},\, \psi_{m',\,n'} \right\rangle = \begin{cases} 1, & (m,\, n) = (m',\, n') \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases} \tag{143}$$

iar mulţimea trebuie să fie completă:

$$(\forall)\, x(\tau) \in L^2(R),\; x(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle x,\, \psi_{m,\,n} \right\rangle \psi_{m,\,n}(\tau) \tag{144}$$

În continuare se stabilesc condiţii echivalente condiţiilor (108) şi (109) în domeniul frecvenţă. Pe baza relaţiei lui Parseval se poate scrie:

$$\left\langle \psi_{m,\,n}(\tau), \psi_{m',\,n'}(\tau) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle F\left\{\psi_{m,\,n}(\tau)\right\}(\omega), F\left\{\psi_{m',\,n'}(\tau)\right\}(\omega) \right\rangle \tag{145}$$

Dar:

$$F\left\{\psi_{m,\,n}(\tau)\right\}(\omega) = 2^{-\frac{m}{2}} e^{-j\omega 2^{-m} n} F\left\{\psi\right\}\left(2^{-m}\omega\right)$$

Relaţia (145) devine:

$$\left\langle \psi_{m,\,n}(\tau), \psi_{m',\,n'}(\tau) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} 2^{-\frac{m+m'}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\left(2^{-m} n - 2^{-m'} n'\right)} F\left\{\psi\right\}\left(2^{-m}\omega\right) F^*\left\{\psi\right\}\left(2^{-m'}\omega\right) d\omega \tag{146}$$

Se calculează membrul drept al ultimei relații. Se face schimbarea de variabilă:

$$2^{-m}\omega = v$$

Se obține:

$$\left\langle \psi_{m,n}(\tau),\ \psi_{m',n'}(\tau) \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\, 2^{\frac{m-m'}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-j v n} \cdot e^{j 2^{m-m'} v n'}$$

$$F\{\psi\}(v)\ F^{*}\{\psi\}\left(2^{m-m'}v\right) dv$$

Cu schimbarea de variabilă:

$$\omega = v - 2k\pi$$

și cu notația:

$$m - m' = l$$

se obține în final:

$$\left\langle \psi_{m,n}(\tau),\ \psi_{m',n'}(\tau) \right\rangle = 2^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\{\psi\}(\omega + 2k\pi) F^{*}\{\psi\}\left(2^{l}(\omega + 2k\pi)\right) \right]$$

$$e^{-j\omega\left(n-2^{l}n'\right)} d\omega$$

Se face notația:

$$f_l(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\{\psi\}(\omega + 2k\pi)\ F^{*}\{\psi\}\left(2^{l}(\omega + 2k\pi)\right) \qquad (147)$$

și se obține:

$$\left\langle \psi_{m,n}(\tau),\ \psi_{m',n'}(\tau) \right\rangle = 2^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_l(\omega)\ e^{-j\omega\left(n-2^{l}n'\right)} d\omega \qquad (148)$$

unde $f_l(\omega)$ este o funcție periodică de perioadă 2π.

Se pune condiția de ortonormalitate (143). Se vor analiza două cazuri.

Cazul I.

$$m = m'$$

În acest caz:

$$l = 0$$

Funcția $f_0(\omega)$ este constantă și egală cu 1.

Într-adevăr, pentru $l = 0$ și $n = n'$ pe baza relațiilor (143) și (148) se poate scrie:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\omega)\, d\omega = 1$$

Deci componenta continuă a funcției periodice $f_0(\omega)$ este egală cu 1.

Pentru $l = 0$ şi $n \neq n'$ pe baza relaţiilor (143) şi (148) se poate scrie:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\omega)\ e^{-j\omega(n-n')}\, d\omega = 0$$

Deci toţi coeficienţii Fourier ai funcţiei $f_0(\omega)$, cu excepţia componentei sale continue sunt identic nuli. În consecinţă:

$$f_0(\omega) = 1 \qquad (\forall)\ \omega \in R$$

Această relaţie este echivalentă cu:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| F\{\psi\}\ (\omega + 2k\pi) \right|^2 = 1 \tag{149}$$

Cazul II

$$m \neq m'$$

În acest caz $l \neq 0$. Funcţia $f_l(\omega)$ este constantă şi egală cu 0.

Într-adevăr, pe baza relaţiilor (143) şi (148) se poate scrie:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_l(\omega)\ e^{-j\left(n-2^l n'\right)\omega}\, d\omega = 0$$

Oricare ar fi întregii l şi n' fixaţi, poate fi ales n astfel încât:

$$n - 2^l n' = p$$

unde p este un număr întreg.

De aceea, ultima relaţie arată că toţi coeficienţii Fourier ai funcţiei $f_l(\omega)$ sunt identic nuli. În consecinţă:

$$f_l(\omega) = 0, \quad (\forall) \quad \omega \in R, \quad l \in Z - \{0\}$$

Ultima relaţie se mai scrie în forma:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\{\psi\}\ (\omega + 2k\pi)\ F^*\{\psi\}\left(2^l(\omega + 2k\pi)\right) = 0, \ (\forall)\ \omega \in R,\ l \in Z - \{0\} \tag{150}$$

Relaţiile (149) şi (150) sunt echivalentele condiţiei de ortonormalitate în domeniul frecvenţă.

Conform [82], echivalentul în domeniul frecvenţă al condiţiei de completitudine (144), este sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \sum_{l \in Z} \left| F\{\psi\}\left(\frac{\omega}{2^l}\right)\right|^2 = 1 & (151) \\ \sum_{\substack{l \in Z \\ l \geq 0}} F\{\psi\}\left(2^l(\omega + 2p_o\pi)\right) F^*\{\psi\}\left(2^l\omega\right) = 0, \ (\forall)\, p_o \ nr.intreg\ impar & (152) \end{cases}$$

Deci mulțimea $\left\{\psi_{m,\,n}\right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$ este bază ortonormală dacă funcția ψ satisface condițiile: (149), (150), (151) şi (152).

Pentru a găsi o astfel de funcție ψ, în vara anului 1985, Yves Meyer a făcut o ipoteză "ad-hoc" şi anume:

$$\text{supp}\left\{ F\{\psi_M\}\right\} \subset \left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right] \qquad (153)$$

Dacă această ipoteză este respectată atunci devin valabile relațiile:

$$F\{\psi_M\}(\omega)\ F\{\psi_M\}\left(2^l\omega\right) = 0 \quad ptr.\ l \geq 2 \qquad (154)$$

$$F\{\psi_M\}(\omega)\ F\{\psi_M\}(\omega + 2k\pi) = 0 \quad ptr.\ |k| \geq 3 \qquad (155)$$

Într-adevăr:

$$\text{supp}\left\{ F\{\psi_M\}\left(2^l\omega\right)\right\} \in \left[-\frac{2^{3-l}\pi}{3}, -\frac{2^{1-l}\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2^{1-l}\pi}{3}, \frac{2^{3-l}\pi}{3}\right]$$

Dacă:

$$l \geq 2$$

atunci:

$$\frac{2^{3-l}\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} \quad \text{şi} \quad \frac{2^{1-l}\pi}{3} > 0$$

şi încă:

$$-\frac{2^{3-l}\pi}{3} > -\frac{2\pi}{3} \quad \text{şi} \quad -\frac{2^{1-l}\pi}{3} < 0$$

adică:

$$\text{supp}\left\{ F\{\psi_M\}(\omega)\right\} \cap \text{supp}\left\{ F\{\psi_M\}\left(2^l\omega\right)\right\} = \varnothing\ , \ \text{pentru}\ l \geq 2$$

De aceea este adevărată relaţia (154).

De asemenea, suportul funcţiei $F\{\psi_M\}(\omega + 2k\pi)$ se obţine prin translatarea la dreapta cu $2k\pi$ a suportului funcţiei $F\{\psi_M\}(\omega)$. Pentru $k=3$ marginea stângă a suportului funcţiei $F\{\psi_M\}(\omega)$ se deplasează în punctul $\frac{10\pi}{3}$. De aceea, pentru $k \geq 3$ are loc relaţia:

$$\text{supp}\{F\{\psi_M\}(\omega)\} \cap \text{supp}\{F\{\psi_M\}(\omega + 2k\pi)\} = \varnothing$$

În acelaşi fel se poate demonstra că pentru $k \leq -3$ are loc relaţia:

$$\text{supp}\{F\{\psi_M\}(\omega)\} \cap \text{supp}\{F\{\psi_M\}(\omega + 2k\pi)\} = \varnothing$$

În consecinţă şi relaţia (145) este adevărată.

De aceea, relaţia (149) se scrie:

$$\left|F\{\psi_M\}(\omega)\right|^2 + \left|F\{\psi_M\}(\omega - 2\pi)\right|^2 = 1 = \left|F\{\psi_M\}(2\omega)\right|^2 + \left|F\{\psi_M\}(2\omega - 4\pi)\right|^2 \quad (156)$$

Relaţia (150) conduce la:

$$F\{\psi_M\}(\omega)\ F\{\psi_M\}^*(2\omega) + F\{\psi_M\}(\omega - 2\pi) F\{\psi_M\}^*(2\omega - 4\pi) = 0 \quad (157)$$

Relaţiile (151) şi (152) conduc tot la relaţiile (156) şi (157).

Soluţiile sistemului de ecuaţii (156), (157) sunt:

$$\left|F\{\psi_M\}(2\omega - 4\pi)\right| = \left|F\{\psi_M\}(\omega)\right| \quad (158)$$

$$\left|F\{\psi_M\}(\omega - 2\pi)\right| = \left|F\{\psi_M\}(2\omega)\right| = \sqrt{1 - \left|F\{\psi_M\}(\omega)\right|^2} \quad (159)$$

$$\begin{aligned}\arg\{F\{\psi_M\}(\omega)\} + \arg\{F\{\psi_M\}(2\omega - 4\pi)\} - \arg\{F\{\psi_M\}(2\omega)\} - \\ - \arg\{F\{\psi_M\}(\omega - 2\pi)\} = \pi\end{aligned} \quad (160)$$

Dacă:

$$\arg\left\{F\left\{\psi_M\right\}(\eta)\right\} = \frac{\eta}{2}$$

atunci condiția (160) este verificată. Aceasta a fost ideea care a stat la baza soluției date de Yves Meyer în anul 1985. El a considerat o funcție continuă şi indefinit derivabilă pe intervalul $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, $o(\omega)$, cu proprietățile:

1. $(\forall)\, k \geq 1 \qquad o^{(k)}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = o^{(k)}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0$

2. $0 \leq o(\omega) \leq 1; \qquad o\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0;\ o\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1$

3. $o(\omega) = \left| F\left\{\psi_M\right\}(\omega)\right|^2;\ (\forall)\, \omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

Folosind relațiile (187) şi (188) se prelungeşte funcția $o(\omega)$ la intervalul $\left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$. În exteriorul acestui interval funcția se va considera nulă. Construcția se încheie punând:

$$F\left\{\psi_M\right\}(\omega) = e^{j\frac{\omega}{2}}\sqrt{o(\omega)}$$

Această funcție nu aparține doar lui $L^2(R)$ ci chiar şi clasei lui Schwartz. În [42] este dat un exemplu de construcție al funcției $o(\omega)$. Transformata Fourier a funcției "wavelets mother", la care se ajunge în această lucrare este:

$$F\left\{\psi_M\right\}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{2}\upsilon\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right], & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\omega}{2}} \cos\left[\frac{\pi}{2}\upsilon\left(\frac{3}{4\pi}|\omega| - 1\right)\right], & \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}, \\ 0 & , \text{ in rest} \end{cases} \quad (161)$$

unde $\upsilon(\omega)$ este o funcție indefinit derivabilă care satisface condițiile:

$$\upsilon(\omega) = \begin{cases} 0, & daca \quad \omega < 0 \\ 1, & daca \quad \omega \geq 1 \end{cases} \tag{162}$$

şi:

$$\upsilon(\omega) + \upsilon(1-\omega) = 1 \tag{163}$$

Un exemplu de funcţie care satisface aceste condiţii este:

$$\upsilon(\omega) = \begin{cases} 0, & daca \quad \omega < 0 \\ \omega^4\left(35-84\omega-80\omega^2-20\omega^3\right), & daca \quad 0 \leq \omega \leq 1 \\ 1, & daca \quad \omega \geq 1 \end{cases} \tag{164}$$

Comportarea în domeniul timp a funcţiei $\psi_M(\tau)$ descrisă mai sus este prezentată în figura 1.7.1.2.1, iar comportarea sa în domeniul frecvenţă în figura 2.7.1.2.1.

Se constată buna localizare în frecvenţă şi regularitatea funcţiei lui Meyer. Din păcate viteza sa de scădere când $\tau \to \infty$ nu este foarte mare şi de aceea localizarea sa în timp nu este foarte bună.

Pentru determinarea, pe baza condiţiilor (149), (150), (151) şi (152) a unor noi funcţii de tipul "wavelets mother" o altă ipoteză "ad-hoc" a fost făcută de către P.G. Lemarié în anul 1986.

Având în vedere faptul că în relaţiile (149) ÷ (152) operaţiile de dilatare cu 2 şi de translaţie cu 2π au un rol important, Lemarié a încercat să disocieze aceste două operaţii, căutând soluţii de forma:

$$F\{\psi_L\}(\omega) = \alpha(\omega)\,\beta(\omega)$$

unde funcţia $\alpha(\omega)$ să fie omogenă iar funcţia $\beta(\omega)$ să fie periodică de perioadă 4π. Pentru alegerea:

$$\alpha(\omega) = \omega^{-p-1}$$

relaţiile (149) ÷ (152) se reduc la:

$$|\beta(\omega)|^2 \sum_{k \in Z}(\omega - 4k\pi)^{-2p-2} + |\beta(\omega+2\pi)|^2 \sum_{k \in Z}(\omega + 2\pi - 4k\pi)^{-2p-2} = 1 \tag{165a}$$

$$\beta(\omega) \sum_{k \in Z}(\omega - 4k\pi)^{-2p-2} + \beta(\omega+2\pi) \sum_{k \in Z}(\omega + 2\pi - 4k\pi)^{-2p-2} = 0 \tag{165b}$$

$$\sum_{m \in Z} 4^{m(p+1)} \left|\beta\left(\frac{\omega}{2^m}\right)\right|^2 = \omega^{2p+2} \tag{165c}$$

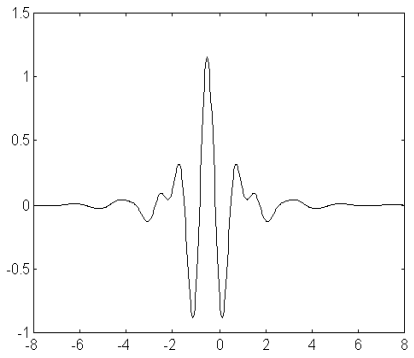


Figura 1.7.1.2.1 Graficul funcției $\psi_M(\tau)$ pentru alegerea funcției υ din relația (164).

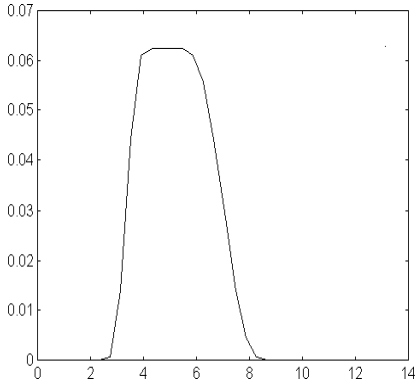


Figura 2.7.1.2.1 Graficul modulului transformatei Fourier a funcției $\psi_M(\tau)$.

$$\sum_{l \geq 1} 4^{-l(p+1)} \left|\beta\left(2^l \omega\right)\right|^2 = -\beta(\omega)\,\beta^*(\omega + 2\pi) \qquad (165d)$$

Primele două relații ((165a) şi (165b)) sunt suficiente pentru determinarea funcției $\beta(\omega)$(modulo un factor arbitrar de modul unitar, periodic de perioadă 2π):

$$\beta(\omega) = \left|\beta(\omega)\right| e^{j\frac{\omega}{2}} \gamma(\omega) \text{ cu } \left|\gamma(\omega)\right| = 1 \text{ şi } \gamma(\omega + 2\pi) = \gamma(\omega)$$

O astfel de soluție verifică şi relațiile (165c) şi (165d).Funcția ψ_L verifică relația:

$$\omega^{p+1} F\left\{\psi_L\right\}(\omega) = \beta(\omega)$$

De aceea se poate afirma că "funcția" $\psi_L^{(p+1)}$ este o combinație liniară de distribuții Dirac centrate în multiplii întregi de 1/2. De aceea este clar că funcția ψ_L este o funcție "spline". Deci ea este continuă şi derivabilă de p-1 ori (aceste derivate sunt şi ele continue). Restricția funcției ψ_L la intervale de forma $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$ este un polinom de grad mai mic sau egal cu p. Mai mult, dacă se face alegerea:

$$\arg\left\{\beta(\omega)\right\} = \frac{\omega}{2}$$

atunci atât funcția ψ_L cât şi primele sale p derivate sunt cu descreştere exponențială.

7.1.2.2 CONCEPTUL DE ANALIZĂ MULTIREZOLUȚIE

Metodele de construcție a funcțiilor "wavelets mother" prezentate până aici se bazau pe ipoteze "ad-hoc". La sfârşitul anului 1986 Stephan Mallat şi Yves Meyer au fondat conceptul de "multirezoluție". Pe baza acestui concept pot fi construite sistematic funcții "wavelets mother" generatoare de baze ortonormale ale spațiului $L^2(R)$.

Definiția 1.7.1.2.2 Mulțimea de spații Hilbert închise (subspații ale lui $L^2(R)$), $\{V_m\}_{m \in Z}$ se numeşte analiză multirezoluție a spațiului $L^2(R)$ dacă elementele sale satisfac următoarele condiții:

1. $\ldots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_o \subset V_1 \subset V_2 \ldots$

2. $\overline{\bigcup_{m \in Z} V_m} = L^2(R)$

3. $\bigcap_{m \in Z} V_m = \{0\}$

4. $(\forall) f \in V_o \quad \Leftrightarrow \quad f\left(2^m \tau\right) \in V_m$

5. Există o funcție φ în V_o astfel încât mulțimea $\{\varphi(\tau - n)\}_{n \in Z}$ să reprezinte o bază ortonormală a spațiului V_o.

Funcția φ, după cum s-a spus deja, poartă numele de funcție de scară. În continuare se prezintă un prim exemplu de analiză multirezoluție a spațiului $L^2(R)$.
Exemplul 1. Analiza multirezoluție de tip Haar:

$$\varphi_H(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le \tau < 1, \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases}$$

Dacă se analizează mulțimea $\{\varphi_H(\tau - n)\}_{n \in Z}$ se constată că aceasta este ortonormală. Pentru a demonstra această afirmație se calculează:

$$\left\langle \varphi_H(\tau - n)\ ,\ \varphi_H(\tau - n') \right\rangle \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_H(\tau - n)\ \ \varphi_H^*(\tau - n')\ d\tau$$

Ținând seama de faptul că:

$$1. \quad \text{supp}\left\{\varphi_H(\tau - n)\right\} \ = \ [n,\ n+1)$$

rezultă că:

$$\left\langle \varphi_H(\tau - n)\ ,\ \varphi_H(\tau - n') \right\rangle \ = \ 0 \quad \text{dacă} \quad n \neq n'$$

De asemenea:

$$\left\langle \varphi_H(\tau - n)\ ,\ \varphi_H(\tau - n') \right\rangle \ = \ \int_{0}^{1} d\tau \ = \ 1$$

Mulțimea $\left\{\varphi_H(\tau - n)\right\}_{n \in Z}$ este o bază ortonormală a spațiului: ${}_H V_o \ = \left\{ f \in L^2(R) \ \middle|\ f \text{ este constată pe intervalul } [n,\ n+1),\ (\forall)\ n \in Z \right\}$.

Deci condiția 5. este verificată.

Fie f_1 un element al lui ${}_H V_o$. Se constată că funcția $f_1(2\tau)$ este constantă pe orice interval de forma $\left[\frac{n}{2},\ \frac{n+1}{2}\right)$, adică este un element al spațiului ${}_H V_1$.

Deci condiția 4° este verificată.

Se constată că odată cu creşterea lui m intervalul $\left[\frac{n}{2^m},\ \frac{n+1}{2^m}\right)$, din definiția spațiului ${}_H V_m$ se îngustează. Atunci când m tinde la ∞ , lățimea acestui interval tinde la 0. De aceea se poate afirma că şi condiția 2. este verificată.

Când m tinde la - ∞, lățimea intervalului $\left[\frac{n}{2^m},\ \frac{n+1}{2^m}\right)$ tinde la ∞. Dar singura funcție din $L^2(R)$, constantă, este funcția identic nulă. Deşi şi condiția 3. este verificată. Deoarece verificarea condiției 1. este trivială rezultă că într-adevăr,

mulțimea $\{{}_{H}V_{m}\}_{m \in Z}$ este o analiză multirezoluție a lui $L^2(R)$. Se remarcă buna localizare în timp şi slaba localizare în frecvență a funcției $\varphi_H(\tau)$.

În continuare se demonstrează următoarea teoremă, care permite construcția de noi baze ortonormale ale spațiului $L^2(R)$ pornind de la diferite analize multirezoluție.

Teorema 1.7.1.2.2 Mulțimea $\left\{\varphi_{m,n}(\tau) = 2^{\frac{m}{2}} \varphi\left(2^m \tau - n\right)\right\}_{n \in Z}$ este o bază ortonormală a spațiului V_m.

Demonstrație: Se demonstrează pentru început că mulțimea considerată este ortonormată.

$$\left\langle \varphi_{m,n}\,,\ \varphi_{m,n'} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle F\{\varphi_{m,n}\},\ F\{\varphi_{m,n'}\} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\langle 2^{-\frac{m}{2}} e^{-j\omega 2^{-m} n} F\{\varphi\}\left(2^{-m}\omega\right),\ 2^{-\frac{m}{2}} e^{-j\omega 2^{-m} n'} F\{\varphi\}\left(2^{-m}\omega\right) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi} 2^{-\frac{(m+m)}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega 2^{-m}(n-n')} F\{\varphi\}\left(2^{-m}\omega\right) F^{*}\{\varphi\}\left(2^{-m}\omega\right) d\omega$$

sau făcând schimbarea de variabilă:

$$2^{-m}\omega = v$$

se obține:

$$\left\langle \varphi_{m,n},\ \varphi_{m,n'} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F\{\varphi\}(v)\right|^2 e^{-jv(n-n')}\, dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F\{\varphi\}(v)\, e^{-jvn} \left(F\{\varphi\}(v)\, e^{-jvn'}\right)^{*} dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\langle F\{\varphi\}(v)\, e^{-jvn}, F\{\varphi\}\, e^{-jvn'} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\langle F\{\varphi(\tau-n)\}(v),\ F\{\varphi(\tau-n')\}(v) \right\rangle = \left\langle \varphi(\tau-n),\ \varphi(\tau-n') \right\rangle$$

Dar funcțiile $\varphi(\tau-n)$ şi $\varphi(\tau-n')$ sunt elemente ale mulțimii $\{\varphi(\tau-n)\}_{n \in Z}$ care este baza ortonormală a spațiului V_o. De aceea :

$$\left\langle \varphi_{m,n}(\tau),\ \varphi_{m,n'}(\tau) \right\rangle = \delta[n - n'] = \begin{cases} 1, & n = n' \\ 0, & n \neq n' \end{cases}$$

Deci mulțimea $\left\{ \varphi_{m,\,n} \right\}_{n \in Z}$ este ortonormată.

Fie semnalul $x_o(\tau)$ element al spațiului V_o. Se poate scrie:

$$x_o(\tau) = \sum_{n \in Z} \left\langle x_o(\tau),\ \varphi(\tau - n) \right\rangle \varphi(\tau - n)$$

Semnalul:

$$x_m(\tau) = x_o(2^m \tau)$$

va putea fi scris în forma:

$$x_m(\tau) = \sum_{n \in Z} \left\langle x_o(\tau),\ \varphi(\tau - n) \right\rangle \varphi\left(2^m \tau - n\right) =$$

$$= \sum_{n \in Z} 2^{-\frac{m}{2}} \left\langle x_o(\tau),\ \varphi(\tau - n) \right\rangle \varphi_{m,\,n}(\tau)$$

Se calculează:

$$\left\langle x_m(\tau),\ \varphi_{m,\,n}(\tau) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_m(\tau)\, \varphi^*_{m,\,n}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_o\left(2^m \tau\right) 2^{\frac{m}{2}}\, \varphi^*\left(2^m \tau - n\right) d\tau$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$u = 2^m \tau$$

se obține:

$$\left\langle x_m(\tau),\ \varphi_{m,\,n}(\tau) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_o(u)\, \varphi^*(u - n)\, 2^{-\frac{m}{2}}\, du = 2^{-\frac{m}{2}} \left\langle x_o(\tau), \varphi\,(\tau - n) \right\rangle$$

De aceea se poate scrie:

$$x_m(\tau) = \sum_{n \in Z} \left\langle x_m(\tau),\ \varphi_{m,\,n}(\tau) \right\rangle \varphi_{m,\,n}(\tau)$$

În concluzie mulțimea $\left\{ \varphi_{m,\,n}(\tau) \right\}_{n \in Z}$ este și completă. Enunțul este demonstrat.

În continuare se exploatează dualitatea indusă de transformarea Fourier pe spațiul $L^2(R)$ demonstrându-se următoarea teoremă.

Teorema 2.7.1.2.2. Dacă mulțimea $\left\{\varphi_{0,\,n}(\tau)\right\}_{n\,\in\,Z}$ este o bază ortonormală a spațiului V_o atunci mulțimea $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ F\left\{\varphi(t-n)\right\}(\omega)\right\}_{n\,\in\,Z}$ este o bază ortonormală a spațiului F V_o.

Demonstrație: Se notează cu F V_o mulțimea formată din transformatele Fourier ale elementelor lui V_o.

Pentru început se verifică ortonormalitatea mulțimii $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ F\left\{\varphi(t-n)\right\}(\omega)\right\}_{n\,\in\,Z}$.

Avem:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F\left\{\varphi(\tau-n)\right\},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F\left\{\varphi(\tau-n')\right\}\right\rangle = \frac{2\pi}{2\pi}\left\langle \varphi(\tau-n),\ \varphi(\tau-n')\right\rangle = \delta\,[n-n']$$

Deci mulțimea $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} F\left\{\varphi(\tau-n)\right\}\right\}_{n\,\in\,Z}$ este ortonormală.

Fie $x(\tau)$ un element al spațiului V_o. Se poate scrie:

$$x(\tau) \;=\; \sum_{n=\,-\,\infty}^{\infty}\left\langle x(\tau),\ \varphi(\tau-n)\right\rangle \varphi(\tau-n)$$

Luând în ambii membrii transformata Fourier se obține:

$$X(\omega) \;=\; \sum_{n=\,-\,\infty}^{\infty}\left\langle x(\tau),\ \varphi(\tau-n)\right\rangle\ F\left\{\varphi(\tau-n)\right\}$$

Dar:

$$\left\langle x(\tau),\ \varphi(\tau-n)\right\rangle \;=\; \frac{1}{2\pi}\left\langle F\left\{x(\tau)\right\},\ F\left\{\varphi(\tau-n)\right\}\right\rangle$$

Deci:

$$X(\omega) \;=\; \sum_{n=\,-\,\infty}^{\infty}\left\langle F\left\{x(\tau)\right\}(\omega),\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ F\left\{\varphi(\tau-n)\right\}(\omega)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ F\left\{\varphi(\tau-n)\right\}(\omega)$$

Rezultă că mulțimea $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} F\left\{\varphi(\tau-n)\right\}(\omega)\right\}_{n\,\in\,Z}$ este şi completă şi enunțul teoremei este demonstrat.

Aplicând teorema de mai sus în cazul spațiilor V_m rezultă că în spațiile $F\ V_m$ avem bazele ortonormale $\left\{F\left\{\varphi_{m,\,n}\right\}\right\}_{n\,\in\,Z}$. De fapt dacă $\left\{V_m\right\}_{m\in Z}$ este o analiză multirezoluție a lui $L^2(R)$ atunci şi mulțimea $\left\{F\left\{V_m\right\}\right\}_{m\,\in\,Z}$ este o analiză multirezoluție a lui $L^2(R)$.

Aceste modalități de construcție a noi analize multirezoluție, pornind de la analize multirezoluție deja cunoscute au fost prezentate în [71].

Se continuă seria exemplelor de analiză multirezoluție. Având în vedere că:

$$\text{sinc}\ \frac{\pi}{2}\,\tau \xleftrightarrow{F} \frac{2}{\pi}\,p_{\frac{\pi}{2}}(\omega)$$

şi că:

$$\psi_H(\tau) = p_{\frac{1}{2}}\left(\tau - \frac{1}{2}\right)$$

pe baza ultimei propoziții demonstrate şi pe baza exemplului E1, rezultă cel de al doilea exemplu de analiză multirezoluție din acest paragraf.

Exemplul 2. Analiza multirezoluție de tip Palley - Wiener

$$\varphi_{P-W}(\tau) = \text{sinc}\,(\pi\tau)$$

$$V_o = \left\{f \in L^2(R) \;\middle|\; F\{f\}(\omega) = 0,\ (\forall)\ \omega \text{ cu } |\omega| > \pi\right\}$$

Se remarcă identitatea spațiilor Hilbert V_o şi B^2_π (spațiul semnalelor de energie finită şi bandă limitată, π). Condiția 5. din definiția analizei multirezoluție reprezintă pentru acest exemplu tocmai cunoscuta teoremă de eşantionare WKS [100].

Trebuie de asemenea remarcat că funcția $\varphi_{P-W}(\tau)$ are o bună localizare în frecvență dar că localizarea sa în timp este slabă. Teorema 2.7.1.2.2 poate fi reformulată chiar şi într-o formă mai generală.

Teorema 3.7.1.2.2 Fiind dată funcția reală, $\mu(\omega)$, continuă pe porțiuni şi baza ortonormală a subspațiului Hilbert închis $F\ V_m$:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F\left\{\varphi_{m,\,o}(\tau - n)\right\}\right\}_{n\,\in\,Z}$$

şi mulțimea:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{j\,\mu(\omega)}\ F\left\{\varphi_{m,\,o}(\tau-n)\right\}(\omega)\right\}_{n\,\in\,Z}$$

este o bază ortonormală a unui spațiu Hilbert.

O demonstrație a acestei teoreme este prezentată în [75]. Pentru ca mulțimea $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{j\,\mu(\omega)}\ F\left\{\varphi_{m,\,o}(\tau-n)\right\}(\omega)\right\}_{n\,\in\,Z}$ să reprezinte baza ortonormală a unui subspațiu $F\ V_o$, element al unei analize multirezoluție este necesar ca funcția $\mu(\omega)$ să satisfacă condiția:

$$\mu(\omega) = \mu(2^m\omega) \quad (\forall)\ m \in Z \tag{166}$$

Această condiție este satisfăcută de exemplu de funcția:

$$\mu(\omega) = (\operatorname{sgn}\omega)\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

În acest caz se obține:

$$e^{j\,\mu(\omega)} = -j\ \operatorname{sgn}\omega$$

De aceea mulțimea $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{j\,\mu(\omega)}\ F\left\{\varphi_{m,\,o}(\tau-n)\right\}(\omega)\right\}_{n\,\in\,Z}$ devine de forma:

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ F\left\{H\left\{\varphi_{m,\,o}(\tau-n)\right\}\right\}(\omega)\right\}_{n\,\in\,Z}$. Cu H s-a notat transformarea Hilbert.

De aceea se poate formula următoarea teoremă.

Teorema 4.7.1.2.1 Dacă mulțimea $\left\{\varphi_{m,\,o}(\tau-n)\right\}_{n\,\in\,Z}$ este o bază ortonormală a unui spațiu V_m, atunci mulțimea $\left\{H\left\{\varphi_{m,\,o}(\tau-n)\right\}\right\}_{n\,\in\,Z}$ este o bază ortonormală a spațiului $H\ V_m$.

De fapt, deoarece:

$$H\left\{f\left(2^m u\right)\right\}(t) = H\left\{f(u)\right\}\left(2^m t\right)$$

rezultă că dacă $\left\{V_m\right\}_{m\,\in\,Z}$ este o analiză multirezoluție a lui $L^2(R)$ atunci și $H\ V_m$ este o analiză multirezoluție a lui $L^2(R)$.

În consecință se poate trage concluzia că dacă φ generează o analiză multirezoluție a spațiului $L^2(R)$ atunci și funcția $H\{\varphi\}$ generează o astfel de analiză.

În continuare se prezintă câteva comentarii referitoare la conceptul de analiză multirezoluție.

În primul rând trebuie observat că acest concept se păstrează chiar dacă condiția 5. este puțin mai generală, impunând ca mulțimea $\{\varphi(\tau - n)\}_{n \in Z}$ să fie o bază Riesz a spațiului V_o.

Făcând notația:

$$|m(\omega)|^2 = \sum_k |F\{\varphi\}(\omega + 2k\pi)|^2$$

se constată că pentru ca mulțimea considerată să fie o bază Riesz este necesar ca să existe constantele pozitive A şi B astfel încât:

$$A \le |m(\omega)|^2 \le B$$

Dar $|m(\omega)|^2$ reprezintă transformata Fourier în timp discret a semnalului obținut prin eşantionarea ideală, cu pas unitar a autocorelației semnalului $\varphi(t)$, $r_{\varphi\varphi}[n]$. În continuare se demonstrează câteva propoziții ajutătoare, [88].

Propoziția 1.7.1.2.2. Oricare ar fi funcția de scară generatoare a unei baze Riesz a lui V_o, $\{\varphi(\tau - n)\}_{n \in Z}$ există o funcție $m_o(\omega)$, indefinit derivabilă, astfel încât:

$$F\{\varphi\}(2\omega) = m_o(\omega)\, F\{\varphi\}(\omega)$$

Demonstrație. Deoarece spațiul V_{-1} este inclus în V_o, funcția $\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)$, element al lui V_{-1} poate fi descompusă în baza lui V_o, în forma:

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right) = \sum_n \left\langle \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right), \varphi(\tau - n)\right\rangle \varphi(\tau - n)$$

Se face notația:

$$m_o[n] = \left\langle \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right), \varphi(\tau - n)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right), \varphi(\tau - n)\right\rangle$$

Trecând ultima relație în domeniul frecvență, se obține:

$$F\{\varphi\}(2\omega) = \left(\sum_n m_o[n]\, e^{-j\omega n}\right) F\{\varphi\}(\omega)$$

Deci funcția $m_o(\omega)$ reprezintă transformata Fourier în timp discret a secvenței $m_o[n]$.

În continuare se consideră mulțimea $\left\{ {}_{0}\varphi(\tau - n) \right\}_{n \in Z}$, cu:

$$F\left\{ {}_{0}\varphi(\tau) \right\}(\omega) = \frac{F\left\{ \varphi(\tau) \right\}(\omega)}{m(\omega)}, \quad m(\omega) \neq 0, \ (\forall)\ \omega \in R \tag{167}$$

Se descompune funcția generatoare a acestei mulțimi în baza $\left\{ \varphi(\tau - n) \right\}_{n \in Z}$.

Se obține:

$${}_{0}\varphi(\tau) = \sum_{n \in Z} \left\langle {}_{0}\varphi(\tau),\ \varphi(\tau - n) \right\rangle \varphi(\tau - n)$$

sau trecând în domeniul frecvență:

$$F\left\{ {}_{0}\varphi(\tau) \right\}(\omega) = \sum_{n \in Z} \left\langle {}_{0}\varphi(\tau),\ \varphi(\tau - n) \right\rangle e^{-j\,\omega\,n}\ F\left\{ \varphi \right\}(\omega)$$

adică, pe baza relației (167):

$$\sum_{n \in Z} \left\langle {}_{0}\varphi(\tau),\ \varphi(\tau - n) \right\rangle e^{-j\,\omega\,n} = \frac{1}{m(\omega)} \tag{168}$$

se caută condițiile pentru ca mulțimea $\left\{ {}_{0}\varphi(\tau - n) \right\}_{n \in Z}$ să fie ortonormată. Se poate demonstra imediat că:

$$\left\langle {}_{0}\varphi(\tau - n),\ {}_{0}\varphi(\tau - n') \right\rangle = F^{-1}\left\{ \left| F\left\{ {}_{0}\varphi(\tau) \right\}(\omega) \right|^{2} \right\}(n' - n)$$

sau ținând seama de relația Wiener-Hincin:

$$\left\langle {}_{0}\varphi(\tau - n),\ {}_{0}\varphi(\tau - n') \right\rangle = r_{0\varphi 0\varphi}(n' - n) \tag{168'}$$

Deci pentru ca mulțimea considerată să fie ortonormată este necesar ca:

$$r_{0\varphi 0\varphi}(k) = \delta[k] \tag{168''}$$

Trecând, în domeniul frecvență, cu ajutorul transformatei Fourier în timp discret se obține:

$$\sum_{k} r_{0\varphi\ 0\varphi}(k)\, e^{-j\,\omega\,k} = 1$$

adică:

$$\sum_{k} \left| F\ \{\varphi\}\ (\omega + 2\,k\,\pi) \right|^{2} = 1 \tag{169}$$

Propoziția 2.7.1.2.2

Mulțimea $\{{}_{o}\varphi(\tau - n)\}_{n \in Z}$ este o bază ortonormală a lui V_o.

Demonstrație: Pentru început se verifică ortonormalitatea.

$$\sum_{k} \left| F\ \{{}_{o}\varphi\}\ (\omega + 2k\pi) \right|^2 = \sum_{k} \left| \frac{F\ \{\varphi\}\ (\omega + 2k\pi)}{m\ (\omega + 2k\pi)} \right|^2$$

Ținând seama de periodicitatea cu 2π a funcției $|m(\omega)|^2$, rezultă:

$$\sum_{k} \left| F\ \{{}_{o}\varphi\}\ (\omega + 2k\pi) \right|^2 = \frac{1}{|m\ (\omega)|^2} \sum_{k} \left| F\ \{\varphi\}\ (\omega + 2k\pi) \right|^2$$

sau ținând seama de definiția funcției $|m\ (\omega)|^2$, se obține:

$$\sum_{k} \left| F\ \{{}_{o}\varphi\}\ (\omega + 2k\pi) \right|^2 = 1$$

În consecință mulțimea este ortonormată. În continuare se demonstrează că această mulțime este şi completă. Fie $x(\tau)$ un semnal din V_o. Se poate scrie:

$$x(\tau) = \sum_{k \in Z} \langle x(\tau),\ \varphi(\tau - k) \rangle\ \varphi(\tau - k)$$

sau trecând în domeniul frecvență:

$$X(\omega) = \left(\sum_{n \in Z} \langle x(\tau),\ \varphi(\tau - k) \rangle\ e^{-j\omega k} \right)\ F\{\varphi\}(\omega) = m_x(\omega)\ F\{\varphi\}(\omega)$$

adică:

$$X(\omega) = m_x(\omega)\, m(\omega)\ F\{{}_{o}\varphi(\tau)\}(\omega)$$

Revenind în domeniul timp:

$$x(\tau) = p(\tau) * {}_{o}\varphi(\tau)$$

unde: $p(\tau) \leftrightarrow m_x(\omega)\, m(\omega)$

Ținând seama de periodicitatea cu 2π a produsului $m_x(\omega)\, m(\omega)$ rezultă că $p(\tau)$ trebuie să fie de forma:

$$p(\tau) = \sum_k p_k \delta(\tau - k)$$

În consecință expresia lui $x(\tau)$ devine:

$$x(\tau) = \sum_k p_k {}_o\varphi(\tau - k)$$

Deci mulțimea considerată este completă.

Cu alte cuvinte oricărei baze ortonormale $\{{}_o\varphi(\tau - n)\}_{n \in Z}$ îi corespunde baza Riesz a lui V_o, $\{\varphi(\tau - n)\}_{n \in Z}$, legătura între aceste mulțimi făcându-se cu relația:

$$F\{{}_o\varphi(\tau)\}(\omega) = \frac{F\{\varphi(\tau)\}(\omega)}{m(\omega)} \quad \text{cu} \quad |m(\omega)|^2 = \sum_k \left|F\{\varphi\}(\omega + 2k\pi)\right|^2$$

De aceea condiția 5. din definiția analizei multirezoluție poate fi generalizată.

Se continuă seria exemplelor de analiză multirezoluție.

Exemplul 3. Analiza multirezoluție cu funcții spline.

$$V_o = \{x(\tau) \in L^2(R) \mid x(\tau) \text{ este o funcție de gradul I pe } [k, k+1),\ k \in Z\}$$

$${}_1\varphi_S(\tau) = \begin{cases} 1 + \tau, & -1 \le \tau \le 0 \\ 1 - \tau, & 0 < \tau \le 1 \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases}$$

Mulțimea $\{{}_1\varphi_S(\tau - n)\}_{n \in Z}$ este o bază Riesz a lui V_o.

Într-adevăr:

$${}_1\varphi_S(\tau) \leftrightarrow \left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$$

De aceea:

$$\left|m_S(\omega)\right|^2 = \sum_k \left|F\{\varphi_S\}\ (\omega + 2k\pi)\right|^2 = \sum_k \left|\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)}{\frac{\omega}{2} + k\pi}\right|^4 \qquad (170)$$

Dar $\left|m(\omega)\right|^2$ este transformata Fourier în timp discret a semnalului $r_{1\varphi_S\,1\varphi_S}(\tau)$ obținut prin eşantionarea ideală cu pas unitar a autocorelație semnalului ${}_1\varphi_s(\tau)$. În continuare se calculează $r_{1\varphi_S\,1\varphi_S}[n]$.

$$r_{1\varphi_S 1\varphi_S}[0] = \int_{-\infty}^{\infty} {}_1\varphi_S^2(\tau)\,d\tau = \int_0^1 (1-\tau)^2 d\tau + \int_{-1}^0 (1+\tau)^2 d\tau = \frac{2}{3}$$

$$r_{1\varphi_S 1\varphi_S}[\pm 1] = \int_{-\infty}^{\infty} {}_1\varphi_S(\tau)\ {}_1\varphi_S(\tau+1)d\tau = \int_{-1}^0 (1+\tau)\ (-\tau)\ d\tau = \frac{1}{6}$$

$$r_{1\varphi_S\,1\varphi_S}[\pm k] = 0 \quad \text{dacă} \quad |k| > 1$$

Deci:

$$\left|m_S(\omega)\right|^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\left(e^{-j\omega} + e^{-j\omega}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos\omega \qquad (171)$$

În consecință:

$$\frac{1}{3} \le \left|m_S(\omega)\right|^2 \le 1$$

Aşadar mulțimea $\left\{{}_1\varphi_S(\tau - n)\right\}_{n \in Z}$ este bază Riesz a spațiului V_o. Pentru a determina şi funcția ${}_1\varphi_{S0}(\tau)$ trebuie identificată funcția $m_S(\omega)$.

Se va presupune că aceasta este de forma:

$$m_S(\omega) = a + b\,e^{j\omega}$$

Pe baza relației (171) se poate scrie:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos\omega = m_S(\omega)\, m_S^*(\omega) = \left(a + b\, e^{j\omega}\right)\left(a + b\, e^{-j\omega}\right)$$

adică:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{2}{3} \\ a\, b = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem sunt:

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \; ; \quad b = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Deci:

$$m_S(\omega) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) e^{j\omega}$$

În consecință:

$$F\left\{{}_1\varphi_S(\tau)\right\} = \frac{\left(\operatorname{sinc}\dfrac{\omega}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) e^{j\omega}}$$

Aplicând transformata Fourier inversă se determină funcția generatoare a bazei ortonormale de translatate a spațiului V_o.

Se remarcă faptul că:

$${}_1\varphi_S(\tau) = \varphi_H(\tau) * \varphi_H(\tau)$$

Convoluționând în continuare cu $\varphi_H(\tau)$ se obțin noi funcții de scară (spline de ordin superior):

$${}_2\varphi_S(\tau) = {}_1\varphi_S(\tau) * \varphi_H(\tau)$$

(şi aşa mai departe) care generează noi analize multirezoluție ale spațiului $L^2(R)$. Acestea se numesc analizele multirezoluție de tip Battle-Lémarié.

Formula generală de calcul este:

$${}_m\varphi_S(\tau) = {}_{m-1}\varphi_S(\tau) * \varphi_H(\tau)$$

Această formulă poate fi rescrisă în forma:

$$ {}_{m}\varphi_{S}(\tau) = 2^{m-1}\sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k}\ {}_{m}\varphi(2\tau - k) $$

sau în forma [76]:

$$ F\left\{ {}_{m}\varphi_{S} \right\}(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} \right)^{m} $$

Funcția ${}_{1}\varphi_{S}(\tau)$ este bine localizată în timp dar localizarea sa în frecvență este mai slabă. Convoluționând de mai multe ori cu $\varphi_{H}(\tau)$ se îmbunătățeşte localizarea frecvențială, dar localizarea temporală se înrăutățeşte.

În continuare se interpretează noțiunea de analiză multirezoluție precum şi cerințele care intervin în definiția sa. Să începem cu semnificația spațiilor V_m. Fie $x(\tau)$ un semnal de energie finită şi $x_m(\tau)$ proiecția sa pe spațiul V_m, element al unei analize multirezoluție, indusă de funcția de scară φ. Pe baza teoremei proiecției, [99], se poate scrie:

$$ \left\langle x - x_{m},\ \varphi_{m,0}(\tau - n) \right\rangle = 0 \qquad (\forall)\ n \in Z $$

adică:

$$ \left\langle x(\tau),\ \varphi_{m,\,0}(\tau - n) \right\rangle = \left\langle x_{m}(\tau),\ \varphi_{m,0}(\tau - n) \right\rangle \qquad (\forall)\ n \in Z \tag{172} $$

Aparținând lui V_m, semnalul $x_m(\tau)$ se poate descompune în baza $\left\{ \varphi_{m,\,o}(\tau - n) \right\}_{n \in Z}$ în forma:

$$ x_{m}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle x_{m}(\tau),\ \varphi_{m,\,o}(\tau - n) \right\rangle\ \varphi_{m,\,o}(\tau - n) $$

sau ținând seama de relația (172):

$$ x_{m}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle x(\tau),\ \varphi_{m,\,o}(\tau - n) \right\rangle\ \varphi_{m,\,o}(\tau - n) \tag{173} $$

Eroarea medie pătratică cu care aproximează semnalul $x_m(\tau)$ semnalul $x(\tau)$ este:

$$ \left\| e_{m} \right\|^{2} = \left\| x(\tau) \right\|^{2} - \left\| x_{m}(\tau) \right\|^{2} $$

Se zice că semnalul $x_m(\tau)$ este aproximarea de rezoluție *m* a semnalului $x(\tau)$. Folosind o analiză multirezoluție pot fi deci obținute aproximările de diferite rezoluții ale semnalului analizat. După cum se ştie în diferite aplicații ale prelucrării semnalelor sunt necesare aproximări de diferite rezoluții ale semnalului de interes.

Dacă este vorba de exemplu de deplasarea unui robot pe urmele unei ținte în mişcare atunci din întreaga imagine achiziționată de robot, acesta are nevoie doar de o anumită porțiune (cea care conține imaginea țintă). Aceasta va putea fi extrasă din imaginea achiziționată prin scăderea rezoluției acesteia până la nivelul corespunzător posibilității de identificare a unor obiecte cu dimensiuni comparabile cu cele ale țintei.

Realizarea acordului dintre semnalul de analizat şi rezoluția necesară aplicației este foarte importantă pentru aplicația avută în vedere deoarece conduce la suprimarea detaliilor inutile (pentru aplicația considerată) din semnalul de analizat. Iată de ce o primă aplicație a analizei multirezoluție este în compresia semnalelor.

Pe baza relației (173) se constată că semnalul $x_m(\tau)$ se obține prin analiza semnalului $x(\tau)$ bazată pe funcțiile $\varphi_{m,n}(\tau)$.

Dacă funcția $\varphi(\tau)$ are suport compact (aşa cum este de exemplu cazul funcției $\varphi_H(\tau)$ sau al funcțiilor ${}_k\varphi_S(\tau),\ k \in Z$) atunci suportul funcțiilor $\varphi_{m,n}(\tau)$ va fi de m ori mai scurt. De aceea analiza în spațiul V_m a semnalului $x(\tau)$ va fi mai localizată (mai detailată) decât analiza aceluiaşi semnal în spațiul V_o (pentru $m > 0$).Se observă caracterul de "microscop matematic" al analizei multirezoluție.

În continuare se prezintă modul în care poate fi utilizat conceptul de analiză multirezoluție la construcția bazelor ortonormale de funcții "wavelet" ale spațiului $L^2(R)$. În acest scop se detaliază pentru început conceptul de descompunere ortogonală a acestui spațiu.

7.1.2.3 CONCEPTUL DE DESCOMPUNERE ORTOGONALĂ

Acesta este bine cunoscut în analiza funcțională, [39], şi reprezintă o modalitate de construcție a unei baze ortonormale a unui spațiu Hilbert pornind de la bazele ortonormale ale unor subspații ortogonale.

Definiția 1.7.1.2.3 Şirul de subspații Hilbert închise $\{W_m\}_{m \in Z}$ este o descompunere ortogonală a lui $L^2(R)$, dacă sunt îndeplinite condițiile:

1. $m \neq p \ \Rightarrow \ W_m \perp W_p$

2. $\overline{\bigcup_{m \in Z} W_m} = L^2(R)$

În continuare se vor construi descompuneri ortogonale ale lui $L^2(R)$ corespunzătoare unor analize multirezoluție. Aceste descompuneri ortogonale vor fi generate de funcții "wavelets mother".

În paragraful anterior s-a demonstrat că oricare ar fi funcția ${}_o\varphi(\tau)$ există o funcție $m_o(\omega)$ astfel încât:

$$F\{{}_o\varphi\}(2\omega) = m_o(\omega)\ F\{{}_o\varphi(\omega)\}$$

În continuare se demonstrează o proprietate a funcțiilor $m_o(\omega)$. Funcția ${}_o\varphi(\tau)$ generează o bază ortonormală de translatate pe V_o.

De aceea:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|F\{{}_o\varphi\}(\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1, \quad (\forall)\ \omega \in R \tag{174}$$

Făcând în ultima relație schimbarea de variabilă:

$$\omega \to 2\omega$$

se poate scrie:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|F\{{}_o\varphi\}\ (2(\omega + k\pi))\right|^2 = 1$$

sau:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|F\{{}_o\varphi\}\ (\omega + k\pi)\right|^2 \left|m_o(\omega + k\pi)\right|^2 = 1$$

sau:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left|F\{{}_o\varphi\}\ (\omega + 2p\pi)\right|^2 \left|m_o(\omega + 2p\pi)\right|^2 +$$

$$+ \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left|F\{{}_o\varphi\}\ (\omega + (2p+1)\pi)\right|^2 \left|m_o(\omega + (2p+1)\pi)\right|^2 = 1$$

și ținând seama de periodicitatea cu 2π a funcției $m_o(\omega)$ (acesta reprezintă răspunsul în frecvență al unui filtru numeric):

$$\left| m_o(\omega)\right|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|F\{{}_o\varphi\}(\omega+2p\pi)\right|^2+\left|m_o(\omega+\pi)\right|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|F\{{}_o\varphi\}(\omega+(2p+1)\pi)\right|^2=1$$

Ținând seama de ortonormalitatea mulțimii $\{{}_o\varphi(\tau-n)\}_{n\in Z}$ rezultă:

$$\left|m_o(\omega)\right|^2 + \left|m_o(\omega+\pi)\right|^2 = 1 \qquad (175)$$

Deci răspunsul în frecvență al filtrului numeric care face legătura între generatoarele bazelor ortonormale ale spațiilor V_o şi V_{-1} are proprietatea exprimată de relația (175).

În continuare se consideră funcția:

$$m_1(\omega) = e^{-j\omega}\, m_o^*(\omega+\pi) = 1$$

Cu ajutorul acesteia se construieşte funcția $\psi(\tau)$ cu transformata Fourier:

$$F\{\psi\}(2\omega) = m_1(\omega)F\{{}_o\varphi\}(\omega)$$

Fie W spațiul vectorial generat de mulțimea $\left\{\psi\left(\frac{\tau}{2}-k\right)\right\}_{k\in Z}$ şi fie:

$$W_{-1} = W\cap L^2(R)$$

În [88] este demonstrată următoarea afirmație.

Propoziția 1.7.1.2.3 Se consideră analiza multirezoluție a lui $L^2(R)$, $\{V_m\}_{m\in Z}$ şi spațiul vectorial W_{-1} definit mai sus. Sunt valabile următoarele proprietăți:

1. $W_{-1}\perp V_{-1}$
2. Mulțimea $\left\{\psi\left(\frac{\tau}{2}-k\right)\right\}_{k\in Z}$ este o bază ortonormată a spațiului W_{-1},
3. $V_o = V_{-1}\overset{\perp}{\oplus} W_{-1}$

Demonstrație. Pentru a demonstra consecința 1., se arată pentru început că:

$$W_{-1} \subset V_o$$

Pornind de la relația:

$$m_o(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_o[n]\, e^{-j\omega n}$$

se obține:

$$m_1(\omega) = e^{-j\omega} m_o^*(\omega+\pi) = e^{-j\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_o[n]\, e^{j\, n(\omega+\pi)}$$

S-a presupus că $m_o(\omega)$ este răspunsul în frecvență al unui filtru numeric cu răspunsul la impuls funcție reală.

Deci:

$$m_1(\omega) = e^{-j\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_o[n]\, e^{j\, n\omega}$$

sau cu schimbarea de indice:

$$-k = n-1$$

$$m_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1}\, m_o[1-k]\, e^{-j\, k\, \omega} \qquad (176)$$

Se remarcă relația dintre coeficienții filtrelor numerice cu răspunsurile în frecvență $m_o(\omega)$ și $m_1(\omega)$:

$$m_1[n] = (-1)^{n-1}\, m_o[1-n] = (-1)^{n-1}\, m_o^{\vee}[n-1] \qquad (177)$$

Dar $F\{\psi\}(2\omega)$ este transformata Fourier a funcției $\frac{1}{2}\,\psi\left(\frac{\tau}{2}\right)$.

De aceea pe baza relației (176) se poate scrie că:

$$\frac{1}{2}\,\psi\left(\frac{\tau}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1}\, m_o[1-n]\; {}_o\varphi\,(\tau-n) \qquad (177')$$

Pe baza ultimei relații se poate afirma că toate funcțiile $\psi\left(\frac{\tau}{2}-k\right)$ sunt elemente ale lui V_o. Deci și combinațiile lor liniare vor fi elemente ale lui V_o. Dar aceste combinații liniare sunt și elemente ale lui W_{-1}. Deci:

$$W_{-1} \subset V_o$$

Înainte de a demonstra consecința 1. a propoziției de care ne ocupăm, se demonstrează consecința 2.

În acest scop se calculează în primul rând suma:

$$S = \sum_{k \in Z} \left| F\{\psi\}\left(2(\omega + k\pi)\right)\right|^2$$

Se poate scrie:

$$S = \sum_{k \in Z} \left| m_1(\omega + k\pi)\right|^2 \left|F\{{}_o\varphi\}(\omega + k\pi)\right|^2 = \sum_{p \in Z} \left| m_1(\omega + 2p\pi)\right|^2 \left|F\{{}_o\varphi\}(\omega + 2p\pi)\right|^2$$

$$+ \sum_{p \in Z} \left| m_1\left(\omega + (2p+1)\pi\right)\right|^2 \left|F\{{}_o\varphi\}\left(\omega + (2p+1)\pi\right)\right|^2$$

sau pe baza periodicității cu 2π a funcției $|m_1(\omega)|^2$:

$$S = |m_1(\omega)|^2 \sum_{p \in Z} \left|F\{{}_o\varphi\}(\omega + 2p\pi)\right|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 \sum_{p \in Z} \left|F\{{}_o\varphi\}\left(\omega + (2p+1)\pi\right)\right|^2$$

Ținând seama de ortonormalitatea mulțimii $\{\varphi_o(\tau - k)\}_{k \in Z}$ se obține:

$$S = |m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2$$

Dar:

$$|m_1(\omega)|^2 = \left|e^{-j\omega}\, m_o^*(\omega + \pi)\right|^2 = |m_o(\omega + \pi)|^2$$

şi:

$$|m_1(\omega + \pi)|^2 = \left|e^{-j(\omega + \pi)}\, m_o^*(\omega)\right|^2 = |m_o(\omega)|^2$$

Deci, pe baza relației (175), se poate scrie:

$$S = 1 = \sum_k \left|F\{\psi\}\left(2(\omega + k\pi)\right)\right|^2 = |m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2, \quad (\forall)\, \omega \in R \quad (178)$$

Se remarcă că şi filtrul cu răspunsul în frecvență $m_1(\omega)$ îndeplineşte o condiție de tipul (175).

Dacă în relația (178) variabila ω se înlocuieşte cu $\frac{\omega}{2}$ se poate scrie:

$$\sum_{k} \left| F\{\psi\}\left(2\left(\frac{\omega}{2} + k\,\pi\right)\right) \right|^2 = 1$$

adică:

$$\sum_{k} \left| F\{\psi\}\ (\omega + 2\,k\,\pi) \right|^2 = 1 \tag{179}$$

S-a demonstrat în acest mod că mulțimea $\{\psi(\tau - n)\}_{n \in Z}$ este ortonormată:

$$\langle \psi(\tau - k),\ \psi(\tau - l) \rangle = \delta\,[k - l] \tag{180}$$

În continuare se calculează produsele scalare:

$$\left\langle 2^{-\frac{1}{2}}\ \psi(2^{-1}\tau - k),\ 2^{-\frac{1}{2}}\psi(2^{-1}\tau - l) \right\rangle = 2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-1}\tau - k)\ \psi^{*}(2^{-1}\tau - l)\, d\tau$$

După schimbarea de variabilă:

$$u = 2^{-1}\tau$$

ultima relație devine:

$$\langle \psi_{-1,k}\ ,\ \psi_{-1,l} \rangle = \langle \psi(\tau - k),\ \psi(\tau - l) \rangle = \delta\,[k - l] \tag{181}$$

În consecință mulțimea $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) \right\}_{k \in Z}$ este ortonormată.

Fie $x_o(\tau)$ un element al lui V_o:

$$x_o(\tau) = \sum_{k} a_{o,\,k\,o}\,\varphi(\tau - k)$$

În domeniul frecvență această relație devine:

$$X_o(\omega) = m_x(\omega)\ F\{{}_o\varphi\}(\omega)$$

Fie semnalul $x_{-1}(\tau)$ obținut prin filtrarea semnalului $x_o(\tau)$ cu filtrul cu răspunsul în frecvență $m_1(\omega)$. Se obține:

$$X_{-1}(\omega) = m_1(\omega)\, X_o(\omega) = m_1(\omega)\, m_x(\omega) F\{{}_o\varphi\}(\omega) = m_x(\omega) F\{\psi\}(2\omega)$$

În consecință semnalul $x_{-1}(\tau)$ se exprimă ca şi o combinație liniară de elemente ale mulțimii $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{\tau}{2}-k\right)\right\}_{k\in Z}$. De aceea se poate afirma că această mulțime este completă în W_{-1}. În consecință ea este o bază ortonormală a acestui spațiu. Consecința 2. a teoremei pe care o analizăm este deci demonstrată. Se revine la consecința 1. Se calculează suma seriei:

$$\sum_k F\{\psi\}(2(\omega+k\pi))\; F^*\{{}_o\varphi\}(2(\omega+k\pi)) =$$

$$= \sum_k m_1(\omega+k\pi)\, m_o^*(\omega+k\pi) \left|F\{{}_o\varphi\}(\omega+k\pi)\right|^2 =$$

$$= \sum_p m_1(\omega+2p\pi)\, m_o^*(\omega+2p\pi) \left|F\{{}_o\varphi\}(\omega+2p\pi)\right|^2 +$$

$$+ \sum_p m_1(\omega+(2p+1)\pi)\, m_o^*(\omega+(2p+1)\pi) \left|F\{{}_o\varphi\}(\omega+(2p+1)\pi)\right|^2$$

sau ținând seama de periodicitatea cu perioada 2π a funcțiilor $m_1(\omega)$ şi $m_o^*(\omega)$:

$$\sum_k F\{\psi\}(2(\omega+k\pi))\; F^*\{{}_o\varphi\}(2(\omega+k\pi)) =$$

$$m_1(\omega)\, m_o^*(\omega) \sum_p \left|F\{{}_o\varphi\}(\omega+2p\pi)\right|^2 +$$

$$+ m_1(\omega+\pi)\, m_o^*(\omega+\pi) \sum_p \left|F\{{}_o\varphi\}(\omega+(2p+1)\pi)\right|^2$$

În sfârşit, ținând seama de ortonormalitatea mulțimii $\{{}_o\varphi(\tau-n)\}_{n\in Z}$:

$$\sum_k F\{\psi\}(2(\omega + k\pi))\ F^*\{{}_o\varphi\}(2(\omega + k\pi)) =$$
$$m_1(\omega)\, m_o^*(\omega) + m_1(\omega + \pi)\, m_o^*(\omega + \pi)$$

Dar pe baza legăturii dintre funcțiile $m_1(\omega)$ și $m_o(\omega)$:

$$m_1(\omega)\, m_o^*(\omega) + m_1(\omega + \pi)\, m_o^*(\omega + \pi) = e^{-j\omega} m_o^*(\omega + \pi)\, m_o^*(\omega) +$$
$$+ e^{-j\omega} e^{-j\pi}\ m_o^*(\omega)\, m_o^*(\omega + \pi) = e^{-j\omega}\,(1-1)\, m_o^*(\omega)\, m_o^*(\omega + \pi) = 0$$

S-a demonstrat că:

$$m_1(\omega)\, m_o^*(\omega) + m_1(\omega + \pi)\, m_o^*(\omega + \pi) = 0 \qquad (\forall)\ \omega \in R \tag{182}$$

Se poate deci scrie:

$$\sum_k F\{\psi\}(2(\omega + k\pi))\ F^*\{{}_o\varphi\}(2(\omega + k\pi)) = 0 \qquad (\forall)\ \omega \in R \tag{183}$$

Înlocuind în această relație variabila ω cu variabila $\frac{\omega}{2}$ se obține:

$$\sum_k F\{\psi\}(\omega + 2k\pi)\ F^*\{{}_o\varphi\}\ (\omega + 2k\pi) = 0$$

Integrând pe intervalul $[-\pi,\pi]$ această relație rezultă:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_k F\{\psi\}(\omega + 2k\pi)\ F^*\{{}_o\varphi\}\ (\omega + 2k\pi) \cdot e^{-j(p-q)\omega}\, d\omega = 0,$$
$$(\forall)\ (p,\ q) \in Z \times Z$$

sau:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_k \int_{-\pi}^{\pi} F\{\psi\}(\omega + 2k\pi)\ F^*\{{}_o\varphi\}\ (\omega + 2k\pi) \cdot e^{-j(p-q)\omega}\, d\omega = 0,$$
$$(\forall)\ (p,\ q) \in Z \times Z$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$u = \omega + 2k\pi$$

ultima relație devine:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} F\{\psi\}(u)\ F^{*}\{{}_{o}\varphi\}(u)\cdot e^{-j(p-q)u}\,du = 0,$$

$$(\forall)\ (p,\ q) \in Z \times Z$$

adică:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F\{\psi\}(u)\ F^{*}\{{}_{o}\varphi\}(u)\cdot e^{-j(p-q)u}\,du = 0$$

sau pe baza definiției produsului scalar pe $L^2(R)$:

$$\frac{1}{2\pi}\left\langle F\{\psi\}\ e^{-jpu},\ \left[F\{{}_{o}\varphi\}\ e^{-jqu}\right]^{*}\right\rangle = 0, \quad (\forall)\ (p,\ q) \in Z \times Z$$

Conform relației lui Parseval, ultima relație este echivalentă cu:

$$\left\langle \psi(\tau - p),\ {}_{o}\varphi(\tau - q)\right\rangle = 0, \quad (\forall)\ (p,\ q) \in Z \times Z \tag{184}$$

Dar:

$$\frac{1}{2}\left\langle \psi\left(\frac{\tau}{2} - p\right),\ {}_{o}\varphi\left(\frac{\tau}{2} - q\right)\right\rangle = \left\langle \psi(\tau - p),\ {}_{o}\varphi(\tau - q)\right\rangle \tag{185}$$

Se poate deci scrie:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{\tau}{2} - p\right),\ \frac{1}{\sqrt{2}}{}_{o}\varphi\left(\frac{\tau}{2} - q\right)\right\rangle = 0 \quad (\forall)\ (p,\ q)\ \in Z \times Z$$

De aceea rezultă că mulțimile $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{\tau}{2} - p\right)\right\}_{p \in Z}$ și $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}{}_{o}\varphi\left(\frac{\tau}{2} - q\right)\right\}_{q \in Z}$ sunt ortogonale. Având în vedere că aceste mulțimi reprezintă baze ortonormale ale spațiilor W_{-1} și V_{-1} rezultă că aceste două spații sunt ortogonale. Deci consecința 1. a propoziției 1.7.1.2.3 este demonstrată. Mai rămâne justificarea consecinței 3.

Fie $x_{-1}(\tau)$ proiecția semnalului $x_0(\tau)$ din V_o pe spațiul V_{-1}. Se poate scrie:

$$x_0(\tau) = \sum_k a_{0,k}\, {}_0\varphi(\tau - k)$$

şi:

$$x_0(\tau) = x_{-1}(\tau) + d_{-1}(\tau)$$

Conform teoremei proiecției semnalul eroare $d_{-1}(\tau)$ este ortogonal pe spațiul V_{-1}. Deci conform consecinței 1°, $d_{-1}(\tau)$ aparține spațiului W_{-1}.

Se poate scrie:

$$x_{-1}(\tau) = \frac{1}{2}\sum_k \left\langle x_0(\tau),\ {}_0\varphi\left(\frac{\tau}{2} - k\right)\right\rangle {}_0\varphi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) \tag{186}$$

şi:

$$d_{-1}(\tau) = \frac{1}{2}\sum_k \left\langle x_0(\tau),\ \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right)\right\rangle \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) \tag{187}$$

Ultima relație este valabilă deoarece:

$$\left\langle x_0(\tau),\ \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right)\right\rangle = \left\langle x_{-1}(\tau) + d_{-1}(\tau),\ \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right)\right\rangle =$$
$$= \left\langle x_{-1}(\tau),\ \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right)\right\rangle + \left\langle d_{-1}(\tau),\ \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right)\right\rangle = \left\langle d_{-1}(\tau),\ \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right)\right\rangle \tag{188}$$

Ținând seama de descompunerea lui $x_0(\tau)$ în baza $\{{}_0\varphi(\tau - k)\}_{k \in Z}$ relațiile (186) şi (187) devin:

$$x_{-1}(\tau) = \frac{1}{2}\sum_k \left\langle \sum_l a_{0,l}\, {}_0\varphi(\tau - l),\ {}_0\varphi\left(\frac{\tau}{2} - k\right)\right\rangle {}_0\varphi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) \tag{189}$$

şi:

$$d_{-1}(\tau) = \frac{1}{2}\sum_k \left\langle \sum_l a_{0,l}\, {}_0\varphi(\tau - l),\ \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right)\right\rangle \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) \tag{190}$$

Cu notațiile:

$$a_{-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l} a_{o,l} \left\langle {}_o\varphi(\tau - l),\ {}_o\varphi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) \right\rangle \tag{191}$$

şi:

$$d_{-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l} a_{o,l} \left\langle {}_o\varphi(\tau - l),\ \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) \right\rangle \tag{192}$$

relaţiile (189) şi (190) devin:

$$x_{-1}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k} a_{-1,k}\ {}_o\varphi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) \tag{193}$$

şi:

$$d_{-1}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k} d_{-1,k}\ \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) \tag{194}$$

Iată cum se exprimă componentele semnalului $x_o(\tau)$ ca descompuneri în bazele ortonormale ale spaţiilor V_{-1} şi W_{-1}. Deci oricare ar fi semnalul $x_o(\tau)$ din V_o există semnalul $x_{-1}(\tau)$ (din V_{-1} inclus în V_o) şi $d_{-1}(\tau)$ (din W_{-1} inclus în V_o) astfel încât:

$$x_o(\tau) = x_{-1}(\tau) + d_{-1}(\tau)$$

De aceea se poate afirma că:

$$V_{-1} \cup W_{-1} = V_o$$

Conform consecinţei 2. a teoremei de care ne ocupăm rezultă că spaţiul W_{-1} este complementul ortogonal al spaţiului V_{-1} în raport cu spaţiul V_o.

Consecinţa 3. şi teorema propriu-zisă sunt astfel demonstrate. În continuare se fac câteva comentarii inspirate de propoziţia demonstrată.

A) Relaţiile (191) şi (192) permit calculul coeficienţilor proiecţiilor semnalului $x_o(\tau)$ pe spaţiile V_{-1} şi W_{-1}, $a_{-1,k}$, $d_{-1,k}$ cu ajutorul coeficienţilor dezvoltării acestui semnal în baza lui V_o, $a_{o,k}$.

B) Relaţiile (191) şi (192) se mai pot pune în forma:

$$a_{-1,k} = \sqrt{2} \sum_{l} a_{o,l}\ m_o^*[l - 2k] \tag{195}$$

$$d_{-1,k} = \sqrt{2} \sum_{l} a_{0,l}\, m_1^*[l - 2k] \tag{196}$$

ținând seama de definițiile funcțiilor $m_0(\omega)$ și $m_1(\omega)$.

Aceste relații stau la baza unui algoritm modern (introdus de Mallat) de calcul al coeficienților proiecțiilor semnalului $x_0(\tau)$ pe spațiile V_{-m} și W_{-m} ($m > 0$) care stabilește legătura dintre teoria funcțiilor "wavelet" și filtrele piramidale. De asemenea cu ajutorul acestor relații se pune în evidență legătura dintre teoria funcțiilor "wavelet" și metoda de codare în subbenzi a semnalelor. Aceste legături vor fi evidențiate în cadrul unor paragrafe următoare din lucrarea de față .

C) Semnalul $a_{0,n}$ poate fi reconstruit perfect dacă se cunosc semnalele $a_{-1,n}$ și $d_{-1,n}$. Într-adevăr:

$$x_{-1}(\tau) + d_{-1}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n} a_{-1}[n]\, {}_0\varphi\left(\frac{\tau}{2} - n\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n} d_{-1}[n]\, \psi\left(\frac{\tau}{2} - n\right)$$

Dar:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, {}_0\varphi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) = \sqrt{2} \sum_{p} m_0[p]\, \varphi_0(\tau - 2k - p)$$

și:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, \psi\left(\frac{\tau}{2} - k\right) = \sqrt{2} \sum_{p} m_1[p]\, \varphi_0(\tau - 2k - p)$$

Deci:

$$x_{-1}(\tau) + d_{-1}(\tau) =$$

$$= \sum_{n} \left(a_{-1}[n] \sum_{p} m_0[p]\, {}_0\varphi(\tau - 2n - p) + d_{-1}[n] \sum_{p} m_1[p]\, {}_0\varphi(\tau - 2n - p) \right) \sqrt{2}$$

Făcând schimbarea de indice:

$$l = 2n + p$$

ultima relație devine:

$$x_{-1}(\tau) + d_{-1}(\tau) =$$

$$= \sum_{n} \left(a_{-1}[n] \sum_{l} m_0[l - 2n]\, {}_0\varphi(\tau - l) + d_{-1}[n] \sum_{l} m_1[l - 2n]\, {}_0\varphi(\tau - l) \right) \sqrt{2} =$$

$$= \sum_{n} \left(\sum_{l} a_{-1}[n]\, m_0[l - 2n] + d_{-1}[n] m_1[l - 2n] \right) {}_0\varphi(\tau - l)\, \sqrt{2}$$

Identificând membrul drept al ultimei relații cu descompunerea semnalului $x_o(\tau)$ în baza $\{{}_o\varphi(\tau - n)\}_{n \in Z}$, se obține:

$$a_{o,l} = \sum_n \left(a_{-1}[n]\, m_o[l-2n] + d_{-1}[n]\, m_1[l-2n]\right) \sqrt{2} \qquad (197)$$

S-au folosit notațiile:

$$a_{-1}[n] = a_{-1,n} \text{ şi } d_{-1}[n] = d_{-1,n}$$

Deci semnalul $x_o(\tau)$ poate fi reconstruit pornind de la semnalele în timp discret $a_{-1}[n]$ şi $d_{-1}[n]$, folosind filtrele numerice cu răspunsurile în frecvență $m_o(\omega)$ şi $m_1(\omega)$, care respectă condițiile:

$$\begin{cases} |m_o(\omega)|^2 + |m_o(\omega+\pi)|^2 = 1 \\ |m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega+\pi)|^2 = 1 \\ m_o(\omega)\, m_1^*(\omega) + m_o(\omega+\pi)\, m_1^*(\omega+\pi) = 0 \end{cases} \qquad (198)$$

unde:

$$\begin{cases} F\{{}_o\varphi\}(2\omega) = m_o(\omega)\, F\{{}_o\varphi\}(\omega) \\ F\{\psi\}(2\omega) = m_1(\omega)\, F\{{}_o\varphi\}(\omega) \end{cases} \qquad (199)$$

D) În continuare se consideră că spațiul W_m este complementul ortogonal al spațiului V_m în raport cu spațiul V_{m+1}.

Se constată că:

$${}_o\varphi(\tau) \in V_o \text{ şi } {}_o\varphi(2\tau) \in V_1$$

Se pune întrebarea: În ce spațiu se găseşte funcția $\psi(\tau)$?

Se ştie că funcția $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi\left(\frac{\tau}{2}\right)$ generează mulțimea $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi\left(\frac{\tau}{2}-k\right)\right\}_{k \in Z}$ baza ortonormală a spațiului W_{-1}, inclus în V_o. Pe baza ipotezei 4. din definiția analizei multirezoluție rezultă că $\psi(\tau) \in V_1$. Dar pe baza relației (180) rezultă că funcția $\psi(\tau)$ este ortogonală pe mulțimea $\{{}_o\varphi(\tau - k)\}_{k \in Z}$.

Dar această mulțime generează spațiul V_o. În consecință:

$$\psi \in V_1 \text{ şi } \psi \perp V_o$$

Dar funcția ψ aparține complementului ortogonal al lui V_o în V_1, W_o:

$$V_1 = V_o \overset{\perp}{\oplus} W_o$$

Se constată că mulțimea $\{\psi(\tau - k)\}_{k \in Z}$ este inclusă în W_o. Această mulțime este completă în W_0. Se va demonstra această afirmație prin reducere la absurd. S-a presupus că semnalul $w_o(\tau)$ este un element din W_o, ortogonal pe toate elementele mulțimii $\{\psi(\tau - k)\}_{k \in Z}$.

Se poate scrie:

$$\langle w_0(\tau), \psi(\tau - k) \rangle = 0, \ \forall k \in Z$$

Conform relației (180) rezultă că semnalul $w_o(\tau)$ este de forma :

$$w_0(\tau) = \sum_l c_{l\ o} \varphi(\tau - l)$$

Deci semnalul $w_o(\tau)$ aparține spațiului V_o. Această afirmație contrazice ipoteza făcută. Deci mulțimea $\{\psi(\tau - k)\}_{k \in Z}$ este completă în W_o. Pe baza relației (181) se poate afirma că această mulțime este şi ortonormată. În consecință ea este o bază ortonormală a spațiului W_o.

La fel se poate demonstra că mulțimea $\{\psi_{m,n}(\tau)\}_{n \in Z}$ este o bază ortonormală a spațiului W_m.

E) Iterând de mai multe ori relațiile între mulțimi, deja demonstrate, se poate scrie:

$$V_M = V_{M-1} \overset{\perp}{\oplus} W_{M-1} = V_{M-2} \overset{\perp}{\oplus} W_{M-2} \overset{\perp}{\oplus} W_{M-1} = \ldots = V_0 \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{0 \le p \le J}{\oplus}} W_p \right) \quad (200)$$

Dar pentru că $\{V_m\}_{m \in Z}$ reprezintă o analiză multirezoluție a lui $L^2(R)$ se poate scrie:

$$\overline{\bigcup_{m\in Z} V_m} = L^2(R)$$

sau :

$$\overline{\overset{\perp}{\bigoplus_{m\in Z}} W_m} = L^2(R)$$

adică:

$$\overline{\bigcup_{m\in Z} W_m} = L^2(R)$$

Ținând seama de faptul că:

$$W_{m-1} \subset V_m$$

şi că:

$$W_m \perp V_m$$

rezultă că:

$$W_{m-1} \perp W_m$$

În consecință se poate afirma că $\{W_m\}_{m \in Z}$ reprezintă o descompunere ortogonală a lui $L^2(R)$. Pa baza unei teoreme celebre de analiză funcțională care afirmă că prin concatenarea bazelor ortogonale ale unei descompuneri ortogonale a lui $L^2(R)$ se obține o bază ortonormală a lui $L^2(R)$ rezultă că mulțimea $\{\psi_{m,n}(\tau)\}_{n \in Z,\, m \in Z}$ este o bază ortonormală a lui $L^2(R)$. În continuare se prezintă două exemple de descompuneri ortogonale ale lui $L^2(R)$.

Exemplul 1. Expresia funcției de scară corespunzătoare este:

$$\varphi_H(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le \tau < 1, \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases}$$

De aceea:

$$\frac{1}{2}\varphi_H\left(\frac{\tau}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le \tau < 2, \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases}$$

Se constată că:

$$\frac{1}{2}\,\varphi_H\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\varphi_H(\tau) + \frac{1}{2}\,\varphi_H(\tau-1)$$

În consecință:

$$m_{o_H}[n] = \frac{1}{2}\,\delta[n] + \frac{1}{2}\,\delta[n-1]$$

respectiv:

$$m_{o_H}(\omega) = \frac{1+e^{-j\omega}}{2}$$

De aceea folosind relația (177') se obține:

$$\frac{1}{2}\,\psi\left(\frac{\tau}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,\varphi_H(\tau) + \frac{1}{2}\,\varphi_H(\tau-1)$$

adică:

$$\frac{1}{2}\,\psi\left(\frac{\tau}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,\varphi_H(\tau) + \frac{1}{2}\,\varphi_H(\tau-1)$$

Dar având în vedere că dacă funcția $\psi_\alpha(\tau)$ este o funcție de tip "wavelets mother" atunci şi funcția $-\psi_\alpha(\tau)$ este o funcție de tip "wavelets mother" rezultă expresia funcției generatoare a descompunerii ortogonale de tip Haar:

$$\psi_H(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right), \\ -1, & \tau \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right) \end{cases}$$

Se recunoaşte în mulțimea $\left\{\psi_{H_{m,n}}(\tau)\right\}_{n\in Z,\ m\in Z}$ expresia binecunoscutei baze ortonormale de tip Haar a lui $L^2(R)$.

Din păcate localizarea în frecvență a funcției $\psi_H(\tau)$ nu este prea bună. În plus această funcție nu este nici regulată.

Exemplul 2. Descompunerea ortogonală de tip Palley -Wiener.

În [75] se demonstrează că pe baza analizei multirezoluție de tip Palley - Wiener poate fi construită o descompunere ortogonală a lui $L^2(R)$, generată de funcția:

$$\psi_{PW}(\tau) = \frac{\sin(2\pi\tau) - \sin(\pi\tau)}{\pi\tau}$$

Din păcate această funcție nu este foarte bine localizată în timp.

$$m_{o_{PW}}[2k] = \frac{\delta[k]}{2} \quad \text{şi} \quad m_{o_{PW}}[2k+1] = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}, \quad k \in Z$$

Exemplul 3. Descompunerea ortogonală de tip Battle Lemarié.

Când s-a studiat exemplul E3 de analiză multirezoluție s-a determinat transformata Fourier a funcției de scară de tip Battle Lemarié de ordinul 2:

$$F\{{}_o\varphi_{BL2}\}(\omega) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2\sqrt{1+2\cos^2\frac{\omega}{2}}}$$

Pe baza relației:

$$F\{{}_o\varphi_{BL2}\}(\omega) = m_{0_{oBL2}}\left(\frac{\omega}{2}\right) F\{{}_o\varphi_{BL2}\}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

se determină expresia răspunsului în frecvență:

$$m_{o_{oBL2}}(\omega) = \cos^2\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{1+2\cos^2\frac{\omega}{2}}{1+2\cos^2\omega}}$$

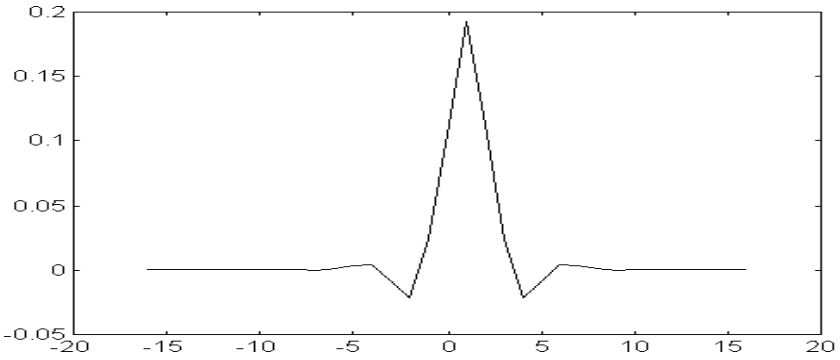
de unde:

$$m_{1_{oBL2}}(\omega) = e^{j\omega}\sin^2\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{1+2\sin^2\frac{\omega}{2}}{1+2\cos^2\omega}}$$

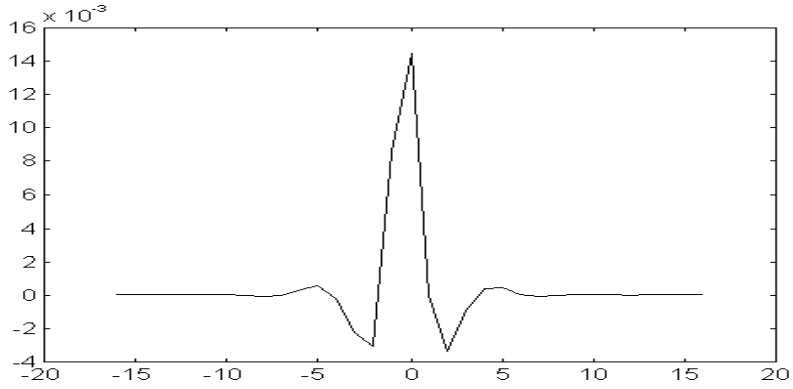
Deci, transformata Fourier a funcției "wavelets mother" de tip Battle Lemarié de ordinul 2 este:

$$F\left\{\psi_{BL2}\right\}(\omega) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, e^{j\frac{\omega}{2}} \sqrt{\frac{1+2\sin^2\frac{\omega}{4}}{1+2\cos^2\frac{\omega}{2}}} \quad \frac{4\sin^4\frac{\omega}{4}}{\frac{\omega^2}{4}\sqrt{1+2\cos^2\frac{\omega}{4}}}$$

Din păcate funcțiile $\varphi_{o_{BL2}}(\tau)$ și $\psi_{BL2}(\tau)$ nu au reprezentări compacte. Graficele lor sunt prezentate în figura 1.7.1.2.3.



a) Funcția de scară.



b) Funcția "wavelets mother" corespunzătoare.

Figura 1.7.1.2.3 Funcțiile generatoare de tip Batle-Lemarié de ordinul II.

Funcțiile B-L de ordin superior sunt prezentate în [42].

7.1.2.4 CARACTERIZAREA ANALIZELOR MULTIREZOLUȚIE CU AJUTORUL POLINOAMELOR. BAZELE ORTONORMALE DE FUNCȚII "WAVELET" CU SUPORT COMPACT

În paragraful anterior a fost subliniat rolul central al filtrelor cu răspunsurile în frecvență $m_o(\omega)$ și $m_1(\omega)$, la construcția analizelor multirezoluție respectiv la construcția descompunerilor ortogonale ale spațiului $L^2(R)$.

S-a arătat că pentru generarea spațiului V_{-1}, pornind de la spațiul V_o se utilizează filtrul cu răspunsul în frecvență $m_o(\omega)$, fiind valabilă relația:

$$F\{{}_o\varphi\}(2\omega) = m_o(\omega)\, F\{{}_o\varphi\}(\omega) \tag{205}$$

S-a demonstrat că filtrele cu răspunsul în frecvență $m_o(\omega)$, trebuie să satisfacă condiția:

$$|m_o(\omega)|^2 + |m_o(\omega+\pi)|^2 = 1, \quad (\forall)\ \omega \in R \tag{206}$$

Luând în relația (205) pentru ω valoarea 0, se obține:

$$m_o(0) = 1 \tag{207}$$

De aceea, pe baza relației (206) se poate scrie:

$$m_o(\pi) = 0 \tag{208}$$

Pentru generarea spațiului W_{-1} pornind de la spațiul V_o, se utilizează filtrul cu răspunsul în frecvență $m_1(\omega)$, fiind valabilă relația:

$$F\{\psi\}(2\omega) = m_1(\omega)\, F\{{}_o\varphi\}(\omega) \tag{209}$$

unde:

$$m_1(\omega) = e^{-j\omega}\, m_o^*(\omega+\pi) \tag{210}$$

Rezultă:

$$m_1(0) = m_o^*(\pi) = 0 \tag{211}$$

şi:

$$m_1(\pi) = 1 \tag{212}$$

Filtrele cu răspunsurile în frecvență $m_o(\omega)$ şi $m_1(\omega)$, care îndeplinesc condițiile de mai sus, au fost introduse în [129], în contextul teoriei codării în subbenzi şi se numesc filtre conjugate în cuadratură (Conjugate Quadratur Filters).

În paragraful de față se va stabili o legătură între modalitățile de construcție a acestor filtre şi teoria polinoamelor.

În acest scop se formulează următoarea propoziție, [88].

Propoziția 1.7.1.2.4 Dacă $|m_o(\omega)|^2$ este strict pozitivă pentru $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci:

1. $\left|F\{{}_o\varphi\}(\omega)\right|^2\Big|_{\omega = \pi} > 0;$

2. $\left|F\{{}_o\varphi\}(\omega)\right|^2\Big|_{\omega = 2k\pi} = 0; \quad (\forall)\, k \in Z - \{0\};$

3. $\left|F\{{}_o\varphi\}(\omega)\right|^2\Big|_{\omega = 0} = 1;$

Demonstrație. Iterând relația (195) se obține:

$$F\{{}_o\varphi\}(\omega) = \prod_{n=1}^{N} m_o\left(\frac{\omega}{2^n}\right) F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\omega}{2^N}\right)$$

Luând în ultima relație pentru ω valoarea π se obține:

$$F\{{}_o\varphi\}(\pi) = \prod_{n=1}^{N} m_o\left(\frac{\pi}{2^n}\right) F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\pi}{2^N}\right)$$

Având în vedere că:

$$m_o\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \neq 0, \quad (\forall)\, n \in N - \{0\}$$

şi că $\varphi(\tau)$ este răspunsul la impuls al unui filtru trece jos:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(0) \neq 0$$

rezultă că, pentru N suficient de mare:

$$F\{{}_{o}\varphi\}\left(\frac{\pi}{2^{N}}\right) \neq 0$$

deoarece funcția $F\{{}_{o}\varphi\}(\omega)$ este considerată continuă. În consecință:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(\pi) \neq 0$$

Consecința 1. a fost demonstrată.

Pentru ca funcția ψ să fie de tipul "wavelets mother" este necesar, conform definiției 1.7.1.2.1 să fie regulată de regularitatea *r*. Această condiție se poate exprima în forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{m}\psi(\tau)\, d\tau = 0, \quad (\forall)\, m, \quad m = 0, 1, \ldots, r \tag{213}$$

adică:

$$F\{\tau^{m}\psi(\tau)\}(\omega)\Big|_{\omega=0} = 0$$

sau:

$$\frac{d^{m}}{d\omega^{m}} F\{\psi(\tau)\}\Big|_{\omega=0} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, r \tag{214}$$

Se ştie că orice funcție de tipul "wavelets mother" reprezintă răspunsul la impuls al unui filtru de tip trece bandă. De aceea ca o consecință directă a condiției de admisibilitate (83'):

$$F\{\psi\}(0) = 0$$

Pe baza relației (209) se poate scrie:

$$F\{\psi\}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) F\{{}_{o}\varphi\}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Derivând în cei doi membri ai ultimei relații se obține:

$$2\frac{d}{d\,\omega}\left\{F\left\{\psi\right\}(\omega)\right\} = \frac{d}{d\,\omega}\left\{m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\right\}F\left\{\varphi_o\right\}\left(\frac{\omega}{2}\right) + m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{d}{d\,\omega}\left\{ F\left\{\varphi_o\right\}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right\}$$

sau, pentru:

$$\omega = 0$$

rezultă:

$$2\frac{d}{d\,\omega}\left\{F\left\{\psi\right\}(\omega)\right\}\Big|_{\omega=0} = \frac{d}{d\,\omega}\left\{m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\right\}\Big|_{\omega=0} F\left\{\varphi_o\right\}(0) + m_1(0)\frac{d}{d\,\omega}F\left\{\varphi_o\right\}\left(\frac{\omega}{2}\right)\Big|_{\omega=0}$$

adică pe baza relațiilor (211) şi (214):

$$m_1'(0) = 0$$

Procedând prin recurență se poate demonstra că:

$$m_1^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, r \tag{215}$$

Derivând relația (210) se obține:

$$m_1'(\omega) = -j\,e^{-j\,\omega}m_o^*(\omega+\pi) + e^{-j\omega}\,m_o^{*\prime}(\omega+\pi)$$

sau pentru:

$$\omega = 0$$

$$m_1'(0) = -j\,m_o^*(\pi) + m_o^{*\prime}(\pi)$$

Pe baza relației (208) se poate scrie:

$$m_o'(\pi) = 0$$

Procedând prin recurență se poate demonstra că:

$$m_o(\pi) = m_o'(\pi) = \ldots = m_o^{(r)}(\pi) = 0 \tag{216}$$

Pe baza relației (205) se poate scrie:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(\omega) = m_o\left(\frac{\omega}{2}\right) F\{{}_{o}\varphi\}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{217}$$

Pentru:

$$\omega = 2\pi$$

se obține:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(2\pi) = m_o(\pi)\ F\{{}_{o}\varphi\}(\pi) = 0$$

Pentru:

$$\omega = 4\pi$$

se obține:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(4\pi) = m_o(0)\ F\{{}_{o}\varphi\}(2\pi) = 0$$

Pentru:

$$\omega = 6\pi$$

se obține:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(6\pi) = m_o(3\pi)\ F\{{}_{o}\varphi\}(3\pi) = m_o(\pi)\ F\{{}_{o}\varphi\}(3\pi) = 0$$

Continuând în acest mod se poate demonstra că:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(2k\pi) = 0, \quad (\forall)\ k \in Z - \{0\}$$

Deci şi consecința 2. este demonstrată.

Pentru a găsi valoarea lui $F\{{}_{o}\varphi\}(0)$, se utilizează relația:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|F\{{}_{o}\varphi\}(\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1 \tag{218}$$

Pe baza relației (207) se poate scrie:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(\omega + 2k\pi) = m_o\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) F\{{}_{o}\varphi\}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \tag{219}$$

Substituind relația (219) în relația (218) şi considerând: $\omega = 0$

se obține:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|m_0(k\pi)\right|^2 \left|F\{_0\varphi\}\ (k\pi)\right|^2 = 1$$

sau:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|m_0(2k\pi)\right|^2 \left|F\{_0\varphi\}\ (2k\pi)\right|^2 +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|m_0((2k+1)\pi)\right|^2 \left|F\{_0\varphi\}\ ((2k+1)\pi)\right|^2 = 1$$

Dar:

$$m_0((2k+1)\pi) = m_0(\pi) = 0$$

Folosind şi consecința 2., ultima relație devine:

$$\left|m_0(0)\right|^2 \left|F\{_0\varphi\}\ (0)\right|^2 = 1$$

sau, pe baza relației (207), se poate scrie:

$$\left|F\{_0\varphi\}\ (0)\right|^2 = 1$$

Deci şi consecința 3. este verificată.

În legătură cu teorema demonstrată pot fi făcute următoarele comentarii:

A. $F\{_0\varphi\}^{(k)}\ (2p\pi) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, r, \quad p = 1, 2, \ldots$

Demonstrație. Derivând relația (205), se obține:

$$2F'\{_0\varphi\}\ (2\omega) = m_0'(\omega)\ F\{_0\varphi\}\ (\omega) + m_0(\omega)\ F'\{_0\varphi\}\ (\omega)$$

Pentru:

$$\omega = \pi$$

ultima relație devine:

$$F'\{_0\varphi\}\ (2\pi) = 0$$

Pentru:

$$\omega = 2\pi$$

ultima relație devine:

$$F'\{{}_{o}\varphi\}(4\pi) = 0$$

Se poate demonstra prin recurență că:

$$F'\{{}_{o}\varphi\}(2p\pi) = 0,\ (\forall)\ p \in Z - \{0\}$$

Pentru celelalte valori ale lui *k* se poate proceda la fel.
B. Polinoamele de grad inferior lui *r* sunt elemente ale spațiului V_o.

Demonstrație. Transformata Fourier a semnalului $x(t, \tau) = \tau^k {}_{o}\varphi(t-\tau)$, în raport cu variabila τ poate fi pusă în forma:

$$F\{\tau^k {}_{o}\varphi(t-\tau)\}(\omega) = j^k \frac{d^k}{d\omega^k}\left[F\{{}_{o}\varphi(t-\tau)\}(\omega)\right] =$$

$$= j^{k-1}\frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}}\left[j\frac{d}{d\omega}\left[e^{-j\omega t}F\{{}_{o}\varphi\}(-\omega)\right]\right]$$

Dar:

$$j\frac{d}{d\omega}\left[e^{-j\omega t}F\{{}_{o}\varphi\}(-\omega)\right] = t\,e^{-j\omega t}F\{{}_{o}\varphi\}(-\omega) - j\,e^{-j\omega t}F'\{{}_{o}\varphi\}(-\omega)$$

Deci:

$$F\{\tau^k {}_{o}\varphi(t-\tau)\}(\omega) = j^{k-1}\frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}}\left[t\,e^{-j\omega t}F\{{}_{o}\varphi\}(-\omega) - j\,e^{-j\omega t}F'\{{}_{o}\varphi\}(-\omega)\right] \quad (220)$$

Eşantionând cu pas unitar semnalul $x(t, \tau)$ după variabila τ se obține semnalul: $x(t, n) = n^k {}_{o}\varphi(t-n)$. Ținând seama de legătura dintre spectrul unui semnal în timp discret şi spectrul semnalului analogic prin a cărui eşantionare s-a obținut semnalul în timp discret [114], se poate scrie:

$$\sum_n n^k {}_{o}\varphi(t-n)\,e^{-jn\Omega} = \sum_p F\{\tau^k {}_{o}\varphi(t-\tau)\}(\omega - 2p\pi)\Big|_{\omega=\Omega} \quad (221)$$

Pentru:

$$\Omega = 0$$

ultima relație devine:

$$\sum_n n^k \, {}_o\varphi(t-n) = \sum_p F\left\{\tau^k \, {}_o\varphi(t-\tau)\right\}\left(-2p\pi\right) \tag{222}$$

Membrul drept al acestei relații este un polinom de gradul *k*, în variabila *t*. Deoarece, membrul stâng este o combinație liniară de elemente ale mulțimii $\left\{{}_o\varphi(t-n)\right\}_{n \in Z}$, bază în V_o, rezultă că polinomul în *t* obținut este element al lui V_o. Astfel enunțul este justificat.

Remarca făcută stabileşte prima legătură dintre noțiunea de analiză multirezoluție şi teoria polinoamelor. O altă legătură a fost sesizată şi exploatată de Ingrid Daubechies în lucrarea [41].

Având în vedere rezultatele acestui paragraf, se constată că se poate presupune că răspunsul în frecvență $m_o(\omega)$ este de forma:

$$m_o(\omega) = \left(\frac{1+e^{-j\omega}}{2}\right)^N P(\omega) \tag{223}$$

Primul factor descrie regularitatea funcției de scară (respectiv a funcției "wavelets mother") iar cel de al doilea este un polinom în variabila $e^{-j\omega}$.

Întradevăr o astfel de alegere satisface atât condițiile impuse de relația (198), cât şi propoziția 1.7.1.2.4. Bineînțeles relația (223) nu este singura alegere posibilă. Avantajul său este că această alegere conduce la construcția de funcții "wavelets mother" cu suport compact. Într-adevăr, conform relației (223) filtrul cu răspunsul în frecvență $m_o(\omega)$ nu are poli. Având în vedere că este vorba despre un filtru numeric rezultă că este un filtru cu răspuns finit la impuls. De aceea şi filtrul cu răspunsul în frecvență $m_1(\omega)$ este tot cu răspuns finit la impuls. În consecință membrul drept al expresiei (177'):

$$\psi(\tau) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} m_1[n] \, {}_o\varphi\,(2\tau - n)$$

va conține un număr finit de termeni nenuli. Deci dacă funcția ${}_o\varphi(\tau)$ are un suport compact atunci şi funcția $\psi(\tau)$ are suport compact. Mai mult, se poate afirma că

lungimea suporturilor funcțiilor φ_o şi ψ depinde de alegerea lui N. Cu cât N este mai mare, cu atât suporturile sunt mai lungi.

Se poate scrie:

$$\left|m_o(\omega)\right|^2 = \left|\left(\frac{1 + e^{-j\omega}}{2}\right)^N\right|^2 |P(\omega)|^2 \tag{224}$$

Dar:

$$\left|\frac{1 + e^{-j\omega}}{2}\right| = \left|\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)}{2}\right| = \left|\cos\frac{\omega}{2}\right|$$

De aceea:

$$\left|\frac{1 + e^{-j\omega}}{2}\right|^2 = \frac{1 + \cos\omega}{2}$$

În consecință relația (214) se mai scrie:

$$\left|m_o(\omega)\right|^2 = \left(\frac{1 + \cos\omega}{2}\right)^N |P(\omega)|^2$$

După cum s-a văzut deja, filtrul cu răspunsul în frecvență $m_o(\omega)$ trebuie să satisfacă condițiile:

$$m_o(0) = 1; \quad m_o(\pi) = 0$$

Se poate demonstra, prin verificare, că aceste condiții sunt satisfăcute de polinoame de forma:

$$\begin{aligned}\left|m_o(\omega)\right|^2 = {} & \frac{1 + \cos\omega}{2} + \alpha_1 \frac{1 + \cos\omega}{2}\,\frac{1 - \cos\omega}{2}\cos\omega + \ldots + \\ & + \alpha_N \left(\frac{1 + \cos\omega}{2}\right)^N \left(\frac{1 - \cos\omega}{2}\right)^N \cos\omega\end{aligned} \tag{225}$$

Aceste polinoame verifică şi condiția:

$$\left|m_o(\omega)\right|^2 + \left|m_o(\omega + \pi)\right|^2 = 1$$

Cu notația:

$$X = \frac{1 + \cos\omega}{2}$$

membrul drept al relației (225) devine:

$$Q(X) = X\left(1+\alpha_1(1-X)(2X-1)+\alpha_2(1-X)^2(2X-1)X+\ldots + \alpha_N X^{N-1}(1-X)^N(2X-1)\right) \tag{226}$$

În [41] coeficienții α_k, $k = \overline{1,N}$ sunt presupuşi reali. Cea mai simplă alegere pentru coeficienții α_k, $k = \overline{1,N}$ este valoarea 0.

În acest caz:

$$Q(X) = X; \quad m_{o_H}(\omega) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{2}$$

Este cazul filtrului folosit în legătură cu funcția de scară de tip Haar.

Dacă se face alegerea:

$$\alpha_1 = 1; \alpha_k = 0, \; k = \overline{2,N}$$

relația (216) devine:

$$Q(X) = X^2(3-2X) \tag{227}$$

Deci:

$$|m_o(\omega)|^2 = \left(\frac{1 + \cos\omega}{2}\right)^2(2 - \cos\omega) = \left|\frac{1 + e^{-j\omega}}{2}\right|^4(2 - \cos\omega) \tag{228}$$

Se determină funcția $m(\omega)$ cu proprietatea că:

$$|m(\omega)|^2 = 2 - \cos\omega$$

Fie:

$$m(\omega) = \alpha + \beta e^{j\omega}$$

Ținând seama de identitatea:

$$|m(\omega)|^2 = m(\omega)\, m^*(\omega)$$

rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 2 \\ \alpha\beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

cu soluțiile:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\ ;\quad \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Relația (228) devine:

$$m_{oD2}(\omega)\, m^{*}_{oD2}(\omega) = \left|\frac{1+e^{-j\omega}}{2}\right|^{4}\left|\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\, e^{j\omega}\right|^{2} \qquad (229)$$

Există mai multe soluții pentru această ecuație. Una dintre ele este:

$$m_{oD2}(\omega) = \left(\frac{1+e^{-j\omega}}{2}\right)^{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\, e^{-j\omega}\right)$$

Cu excepția unui factor de tip exponențială complexă, acestui răspuns în frecvență îi corespunde răspunsul la impuls:

$$m_{oD2}[n] = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{8}, & n = 0 \\ \frac{3+\sqrt{3}}{8}, & n = 1 \\ \frac{3-\sqrt{3}}{8}, & n = 2 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{8}, & n = 3 \\ 0, & in\ rest \end{cases} \qquad (230)$$

Deoarece acest filtru a fost proiectat pentru prima dată în [41] şi deoarece el corespunde cazului N = 2, funcția "wavelets mother" pe care o generează este notată în majoritatea lucrărilor DAU2.

Construcția filtrelor cu răspunsul în frecvență $m_o(\omega)$ poate fi continuată prin recurență. Dacă se consideră că şi coeficientul α_2 este nenul ($\alpha_k = 0,\ k = \overline{3,N}$), atunci expresia polinomului Q(X) devine:

$$Q(X) = X\left(X(3-2X) + \alpha_2(1-X)^2(2X-1)\,X\right) =$$
$$= X^2\left(3-2X+\alpha_2(1-X)^2(2X-1)\right)$$

Funcția de scară asociată va avea regularitatea maximă dacă factorul comun din membrul drept va fi X^3. Deci valoarea lui α_2 ar trebui determinată astfel încât termenul liber al polinomului:

$$3-2X+\alpha_2(1-X)^2(2X-1)$$

să se anuleze. De aceea se obține:

$$\alpha_2 = 3$$

Cu această alegere rezultă:

$$Q(X) = X^3\left(10-15X+6X^2\right)$$

adică:

$$\left|m_{oD3}(\omega)\right|^2 = \left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)^3\left(10-15\,\frac{1+\cos\omega}{2}+6\left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)^2\right)$$

Coeficienții acestor filtre, amplificați cu $\sqrt{2}$, pentru valori ale lui N cuprinse între 2 şi 10, sunt prezentați în tabelul 1.7.1.2.4.

Câteva exemple de funcții de scalare respectiv de funcții de tipul "wavelets mother" sunt prezentate în figura 1.7.1.2.4.

Funcțiile "wavelets mother" obținute astfel au un suport compact (deci localizare bună în timp) au regularitatea prescrisă de valoarea lui N şi o localizare în frecvență destul de bună. Ele pot fi considerate atomi timp-frecvență. Dezavantajul acestor funcții este că nu au expresii explicite. Totuşi expresiile lor pot fi determinate numeric.

În cadrul demonstrației propoziției 1.7.1.2.4 s-a demonstrat şi relația:

$$F\{{}_o\varphi\}(\omega) = \prod_{n=1}^{N} m_o\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\, F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\omega}{2^N}\right)$$

N = 2 :	N = 6 :	N = 8 :	N = 10 :
0.4829629131445341	0.111540743350	0.054415842243	0.026670057901
0.8365163037378079	0.494623890398	0.312871590914	0.188176800078
0.2241438680420134	0.751133908021	0.675630736297	0.527201188932
-0.1294095225512604	0.315250351709	0.585354683654	0.688459039454
	-0.226264693965	-0.015829105256	0.281172343661
N = 3 :	-0.129766867567	-0.284015542962	-0.249846424327
	0.097501605587	0.000472484574	-0.195946274377
0.332670552950	0.027522865530	0.128747426620	0.127369340336
0.806891509311	-0.031582039318	-0.017369301002	0.093057364604
0.459877502118	0.000553842201	-0.044088253931	-0.071394147166
-0.135011020010	0.004777257511	0.013981027917	-0.029457536822
-0.085441273882	-0.001077301085	0.008746094047	0.033212674059
0.035226291882		-0.004870352993	0.003606553567
	N = 7 :	-0.000391740373	-0.010733175483
N = 4 :		0.000675449406	0.001395351747
	0.077852054085	-0.000117476784	0.001992405295
0.230377813309	0.396539319482		-0.000685856695
0.714846570553	0.729132090846	N = 9 :	-0.000116466855
0.630880767930	0.469782287405		0.000093588670
-0.027983769417	-0.143906003929	0.038077947364	-0.000013264203
-0.187034811719	-0.224036184994	0.243834674613	
0.030841381836	0.071309219267	0.604823123690	
0.032883011667	0.080612609151	0.657288078051	
-0.010597401785	-0.038029936935	0.133197385825	
	-0.016574541631	-0.293273783279	
N = 5 :	0.012550998556	-0.096840783223	
	0.000429577973	0.148540749338	
0.160102397974	-0.001801640704	0.030725681479	
0.603829269797	0.000353713800	-0.067632829061	
0.724308528438		0.000250947115	
0.138428145901		0.022361662124	
-0.242294887066		-0.004723204758	
-0.032244869585		-0.004281503682	
0.077571493840		0.001847646883	
-0.006241490213		0.000230385764	
-0.012580751999		-0.000251963189	
0.003335725285		0.000039347320	

Tabelul 1.7.1.2.4. Coeficienții filtrelor care generează funcțiile “wavelets mother” propuse de I. Daubechies

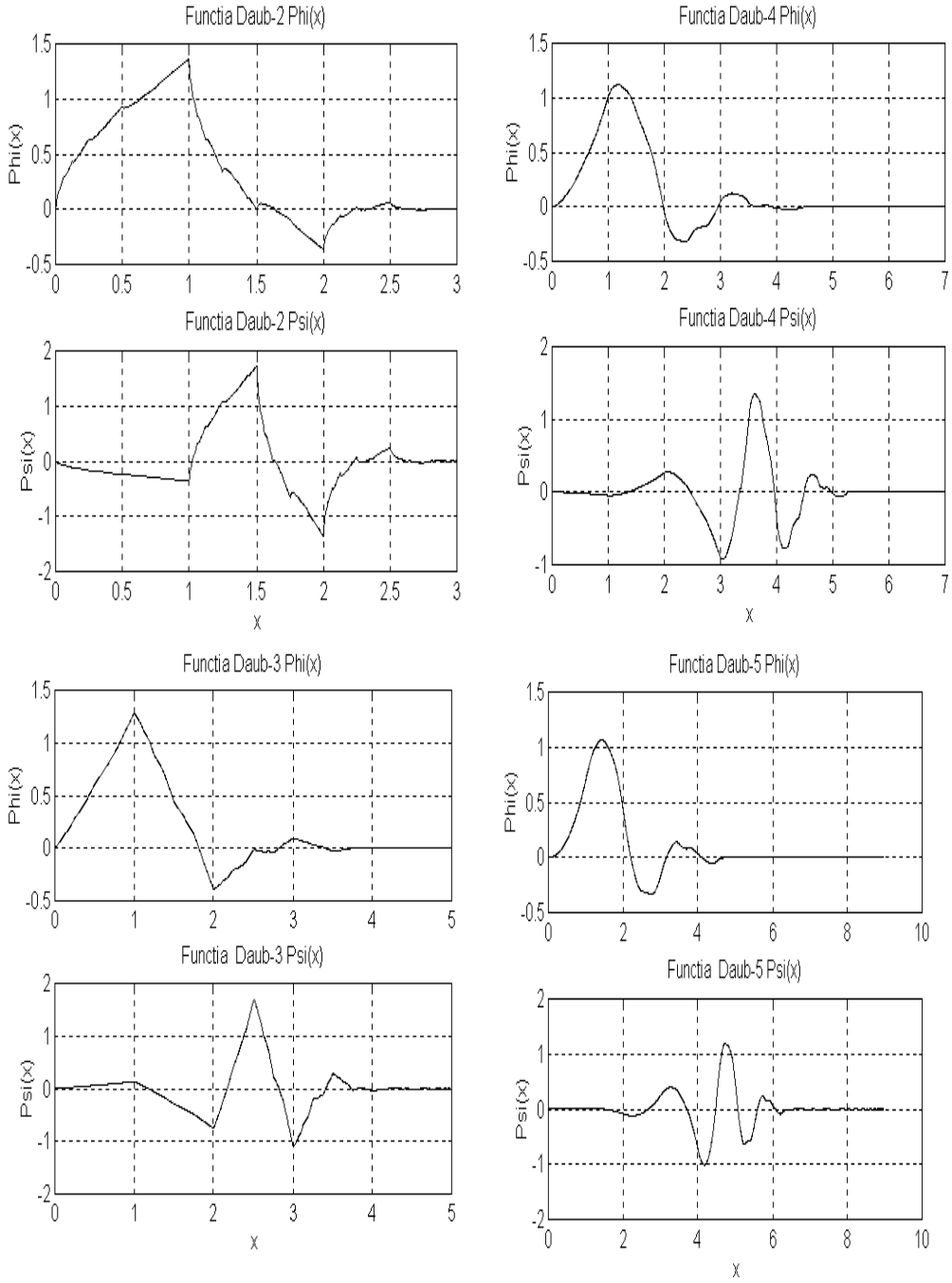


Figura 1.7.1.2.4. Funcțiile “wavelets mother” (psi(x)) şi funcțiile de scară corespunzătoare cu suport compact introduse de Ingrid Daubechies (phi(x)).

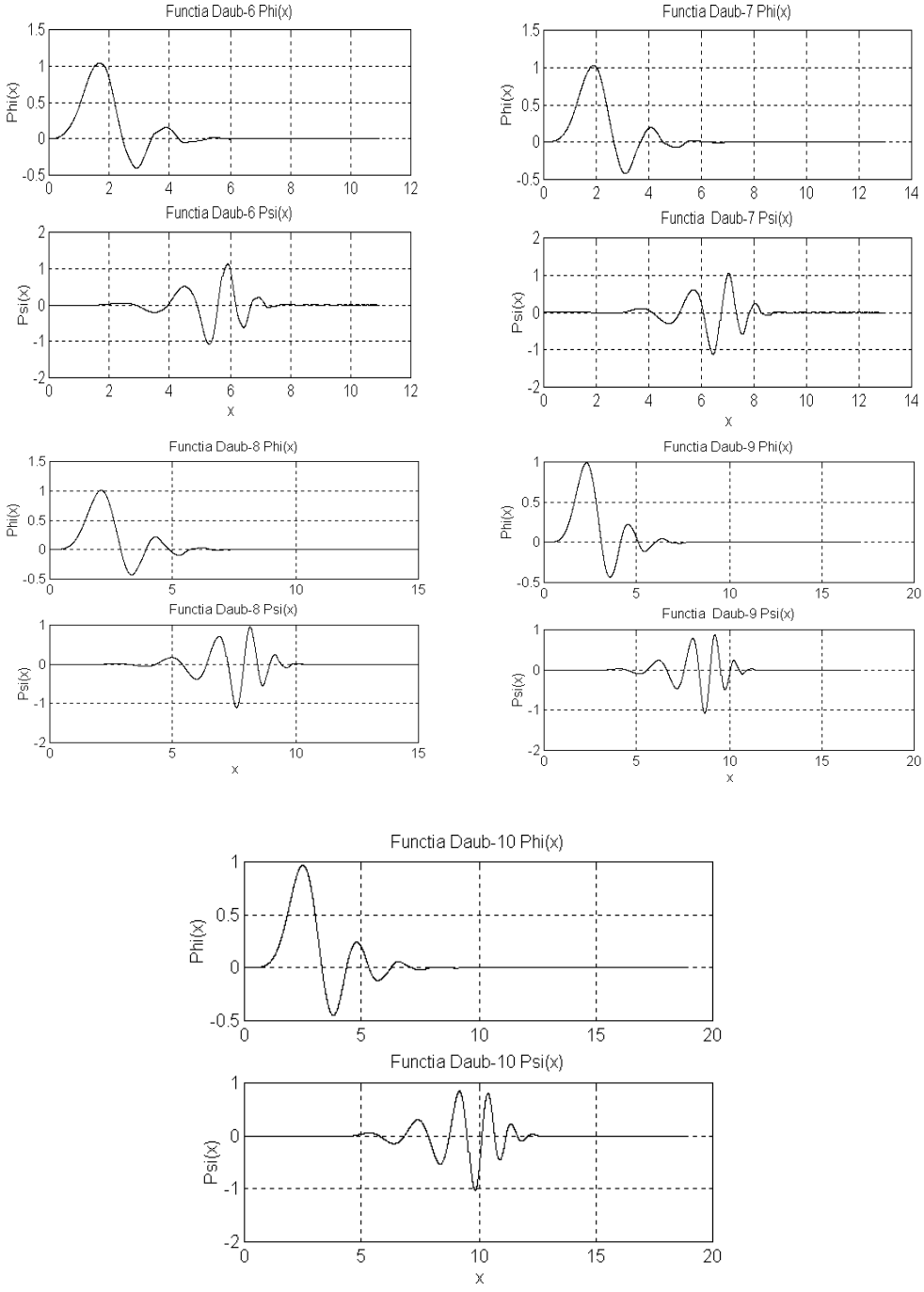


Figura 1.7.1.2.4. (continuare) Funcțiile "wavelets mother" cu suport compact introduse de Ingrid Daubechies (psi(x)) şi funcțiile de scară corespunzătoare (phi(x)).

Trecând la limită pentru N tinzând la infinit ultima relație devine:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} m_o\left(\frac{\omega}{2^n}\right) F\{{}_{o}\varphi\}(0)$$

sau ținând seama de faptul că valoarea transformatei Fourier a oricărei funcții ${}_{o}\varphi(\tau)$, în origine este 1 rezultă:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} m_o\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \tag{231}$$

În consecință, pe baza relației (231) poate fi calculată transformata Fourier a oricărei funcții de scară corespunzătoare uneia dintre funcțiile "wavelets mother" introduse de Daubechies. Inversând această transformare Fourier poate fi obținută expresia funcției de scară corespunzătoare.

Mai mult, pornind de la relația (199):

$$F\{\psi\}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) F\{{}_{o}\varphi\}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

pe baza relației (221) se poate scrie:

$$F\{\psi\}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} m_o\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{n=2}^{\infty} m_o\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$$

Folosind această relație poate fi determinată direct expresia funcției "wavelets mother". Convergența produselor infinite din relațiile (221) şi (222) trebuie considerată în sensul distribuțiilor. In [41] se prezintă o metodă grafică, care se poate implementa cu uşurință pe calculatoare numerice pentru calculul produselor infinite din relațiile (221) şi (222). Principalul dezavantaj al funcțiilor "wavelets mother" propuse de I. Daubechies, descrise în acest paragraf este lipsa lor de simetrie. De fapt pentru nici una dintre aceste funcții nu există vreo axă de simetrie. În consecință, filtrele lor generatoare, cu răspunsurile în frecvență $m_{o_{D_k}}(\omega)$, $m_{1_{D_k}}(\omega)$ nu sunt filtre cu caracteristica de fază liniară.

Acesta este un dezavantaj în unele aplicații mai ales atunci când este vorba de prelucrarea imaginilor.

7.1.2.5 ALGORITMUL LUI MALLAT

Acest algoritm permite calculul rapid al proiecţilor semnalelor de energie finită pe diferite subspaţii, elemente ale unei analize multirezoluţie sau ale unei descompuneri ortogonale. El stabileşte o legătură interesantă între metodele de prelucrare ale semnalelor analogice şi metodele de prelucrare ale semnalelor discrete. S-a demonstrat deja în relaţiile (193) şi (194) că proiecţiile semnalului $x_o(\tau)$ din V_o pe spaţiile V_{-1} şi W_{-1} se pot calcula cu relaţiile:

$$x_{-1}(\tau) = \sum_k a_{-1,k\ 0}\varphi_{-1,\,k}(\tau) \tag{233}$$

şi:

$$d_{-1}(\tau) = \sum_k d_{-1,k}\ \psi_{-1,\,k}(\tau) \tag{234}$$

Coeficienţii acestor descompuneri pot fi exprimaţi pa baza coeficienţilor descompunerii semnalului $x_o(\tau)$ în baza lui V_o, $\{{}_o\varphi(\tau - k)\}_{k \in Z}$, $a_{0,k}$ cu relaţiile (195) şi (196):

$$a_{-1,k} = \sqrt{2}\sum_l a_{0,l}\ m_o^*[l - 2k] \tag{235}$$

şi:

$$d_{-1,\,k} = \sqrt{2}\sum_l a_{0,\,l}\ m_1^*[l - 2k] \tag{236}$$

Aceste relaţii permit calculul coeficienţilor proiecţiilor $x_{-1}(\tau)$ şi $d_{-1}(\tau)$ cu ajutorul coeficienţilor $a_{0,l}$. Fie $x_{-m}(\tau)$ şi $d_{-m}(\tau)$ proiecţiile semnalului $x_o(\tau)$ pe spaţiile V_{-m} şi W_{-m}. Aceste proiecţii se pot descompune în bazele $\{{}_o\varphi_{-m,\,k}(\tau)\}_{k \in Z}$ şi $\{\psi_{-m,\,k}(\tau)\}_{k \in Z}$ ale acestor spaţii:

$$x_{-m}(\tau) = \sum_k a_{-m,\,k}\ \varphi_{o\,-m,\,k}(\tau) \tag{237}$$

şi:

$$d_{-m}(\tau) = \sum_k d_{-m,\,k}\ \psi_{-m,\,k}(\tau) \tag{238}$$

Fie $x_{-m+1}(\tau)$ proiecția semnalului $x_0(\tau)$ pe spațiul V_{-m+1}:

$$x_{-m+1}(\tau) = \sum_k a_{-m+1,k} \, {}_o\varphi_{-m+1,k}(\tau) \tag{239}$$

$$a_{-m,k} = \sqrt{2} \sum_l a_{-m+1,l} \, m_o^*[l-2k] \tag{240}$$

şi:

$$d_{-m,k} = \sqrt{2} \sum_l a_{-m+1,l} \, m_1^*[l-2k] \tag{241}$$

În consecință, pornind de la coeficienții $a_{0,l}$ şi iterând de un număr corespunzător de ori, pe baza relațiilor (240) şi (241), pot fi determinați coeficienții $a_{-m,k}$ şi $d_{-m,k}$. Având în vedere că structura bazelor spațiilor V_{-m} şi W_{-m} este cunoscută rezultă că apoi pot fi determinate proiecțiile semnalului $x_0(\tau)$ pe spațiile V_{-m} şi W_{-m}. Relațiile (240) şi (241) descriu algoritmul de calcul al proiecțiilor semnalului $x_0(\tau)$ pe spațiile V_{-m} şi W_{-m}. În acelaşi timp, aceste relații descriu o modalitate de prelucrare numerică a semnalului $a_{-m+1,k}[l]$ cu ajutorul filtrelor cu răspunsurile la impuls $m_o^*[l]$ şi $m_1^*[l]$, în scopul obținerii semnalelor $a_{-m}[k]$ şi $d_{-m}[k]$. Această prelucrare presupune o filtrare şi o decimare.

De exemplu semnalul $a_{-m}[k]$ poate fi generat cu ajutorul sistemului din figura 1.7.1.2.5.

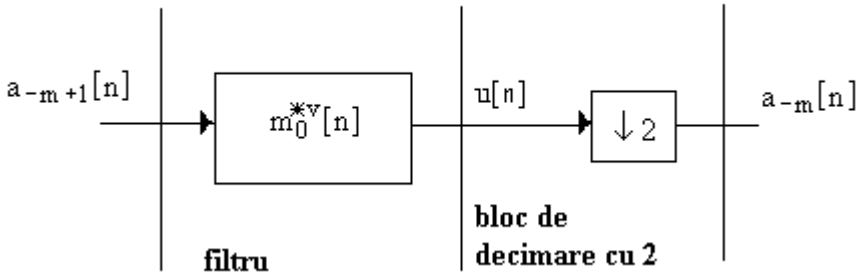


Figura 1.7.1.2.5 Prelucrarea numerică sugerată de relația (240).

Într-adevăr:

$$u[n] = a_{-m+1}[n] * \sqrt{2}\, m_0^{v*}[n] = \sum_l a_{-m+1}[l]\, m_o^*[l-n]$$

Blocul de decimare cu 2 răspunde la semnalul $u[n]$ cu semnalul $u[2n]$. Deci:

$$a_{-\mathrm{m}}[n] \;=\; u[2n] \;=\sum_{l} a_{-\mathrm{m}+1}[l]\; m_{\mathrm{o}}^{*}[l-2n]\;\sqrt{2}$$

S-a regăsit relaţia (240). De aceea sistemul care transformă semnalul $a_{\mathrm{o}}[n]$ în semnalele $a_{-\mathrm{m}}[n]$ şi $d_{-\mathrm{m}}[n]$ are structura din figura 2.7.1.2.5. De fapt sistemul din figură generează şi semnalele $d_{-\mathrm{k}}[n]$, $k = \overline{1,\mathrm{m}}$. Se constată că acest sistem are o intrare şi $m+1$ ieşiri.

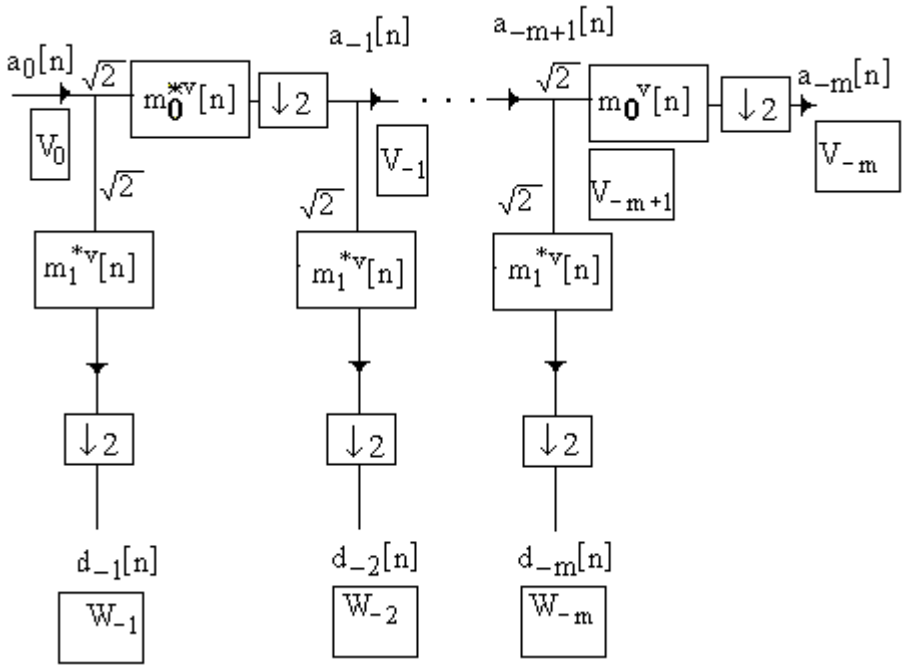


Figura 2.7.1.2.5. Sistemul numeric de proiecţie al semnalului pe spaţiile V_{-m} şi W_{-k}, k=1…m.

Dacă se consideră că semnalul $a_{\mathrm{o}}[n]$ are $2^{\mathrm{m}+1}$ eşantioane nenule atunci se constată că semnalele $a_{-1}[n]$ şi $d_{-1}[n]$ au 2^{m} eşantioane nenule (datorită operaţiilor de decimare cu factor 2) că semnalele $a_{-2}[n]$ şi $d_{-2}[n]$ au $2^{\mathrm{m}-1}$ eşantioane nenule şi aşa mai departe. Semnalele $a_{-\mathrm{m}}[n]$ şi $d_{-\mathrm{m}}[n]$ vor avea doar câte 2 eşantioane nenule. Fie semnalul $y_{\mathrm{o}}[n]$ obţinut prin concatenarea semnalelor $a_{-\mathrm{m}}[n]$, $d_{-1}[n]$, $d_{-2}[n]$, ..., $d_{-\mathrm{m}}[n]$. Se spune că semnalul $y_{\mathrm{o}}[n]$ a fost obţinut prin aplicarea transformării

"wavelet" discretă semnalului $a_o[n]$. Se constată că această transformare este liniară (deoarece sistemul din figura 2.7.1.2.5 este liniar). Din păcate transformarea "wavelet" discretă nu este invariantă la translații (decât dacă translațiile se fac cu multiplii de 2^{m+1}), deoarece sistemul considerat este variant în timp.

Să calculăm numărul eşantioanelor secvenței $y_o[n]$. Acesta este:

$$2+2+2^2+\ldots+2^m = 1+\sum_{k=0}^{m}2^k = 1+\frac{2^{m+1}-1}{2-1} = 2^{m+1}$$

Deci prin transformarea "wavelet" discretă numărul de eşantioane ale semnalului de prelucrat nu se modifică (dacă el este o putere corespunzătoare a lui 2).

Trebuie remarcat faptul că transformarea "wavelet" discretă este inversabilă. În continuare se justifică această afirmație. Procedând la fel ca şi la demonstrația relației (197) se poate arăta că:

$$a_{-m+1,\,l} = \sqrt{2}\sum_{n} a_{-m,\,n}\, m_o[l-2n] + d_{-m,\,n}\, m_1[l-2n] \qquad (242)$$

Deci pe baza semnalelor $a_{-m}[n]$ şi $d_{-m}[n]$ se poate determina semnalul $a_{-m+1}[n]$. Pe baza semnalelor $a_{-m+1}[n]$ şi $d_{-m+1}[n]$ se poate determina semnalul $a_{-m+2}[n]$.

În consecință pornind de la semnalele $a_{-m}[n]$, $d_{-m}[n]$, $d_{-m+1}[n]$, ... , $d_{-1}[n]$ poate fi reconstruit semnalul $a_o[n]$. Relația (242) poate fi implementată cu ajutorul sistemului din figura 3.7.1.2.5.

Dacă la intrarea unui interpolator cu factorul 2 este adus semnalul $x[n]$ atunci la ieşirea sa se obține semnalul $y[n]$, dat de relația:

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n \vdots 2 \\ 0, & in\ rest \end{cases} \qquad (243)$$

De aceea semnalele $u_1[n]$ şi $v_1[n]$ din figura 3.7.1.2.5 pot fi descrise cu relațiile:

$$u_1[n] = \sqrt{2}\sum_{l} u[l]\, m_o[n-l] = \sqrt{2}\sum_{p} u[2p]\, m_o[n-2p] +$$

$$+ \sqrt{2}\sum_{p} u[2p+1]\, m_o[n-2p-1] = \sum_{p} a_{-m}[p]\, m_o[n-2p]\sqrt{2}$$

$$v_1[n] = \sum_l d_{-m}[l]\, m_1[n-2l]\,\sqrt{2}$$

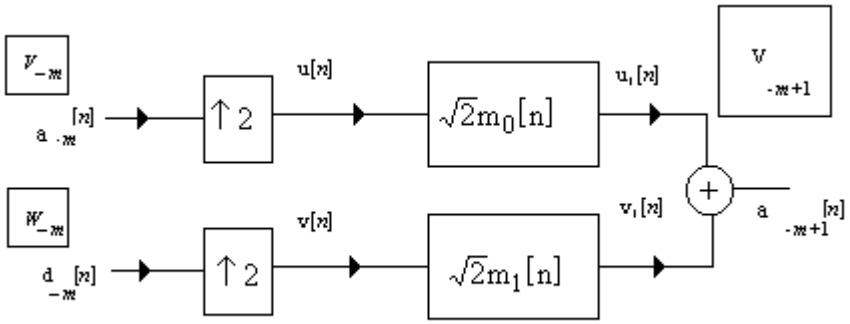


Figura 3.7.1.2.5. Sistem de sinteză care implementează relația (242).

Se constată că într-adevăr sistemul din figura 3.7.1.2.5 implementază relația (242).
De aceea se poate afirma că transformarea "wavelet" inversă este implementată de către sistemul din figura 4.7.1.2.5. Şi transformarea "wavelet" inversă este o transformare liniară.
Algoritmul lui Mallat este un algoritm piramidal deoarece la fiecare iterație a sa (proiecție pe spațiile V_{-k}, W_{-k} din spațiul V_{-k+1}) numărul de eşantioane al secvențelor obținute este jumătate din numărul de eşantioane ale secvenței inițiale
Dacă se consideră o singură iterație din transformatele "wavelet" directă şi inversă se poate obține sistemul de analiză - sinteză din figura 5.7.1.2.5.
Blocul de analiză face codarea semnalului $a_0[n]$ în două subbenzi. Aceasta este legătura dintre teoria funcțiilor "wavelet" şi sistemele de codare în subbenzi. Astfel de sisteme sunt descrise în [79].

Sistemul din figura 2.7.1.2.5, codează semnalul $a_0[n]$ în $m + 1$ subbenzi. Modul în care se face acestă codare este descris în [76]. Câteva aplicații interesante ale sistemelor de decimare şi interpolare sunt prezentate în [75].

Utilizarea unor astfel de sisteme face legătura dintre teoria funcțiilor "wavelet" şi teoria sistemelor "multirating" [142]. Algoritmul lui Mallat şi-a găsit deja numeroase aplicații. O parte dintre acestea vor fi prezentate în capitolele următoare.

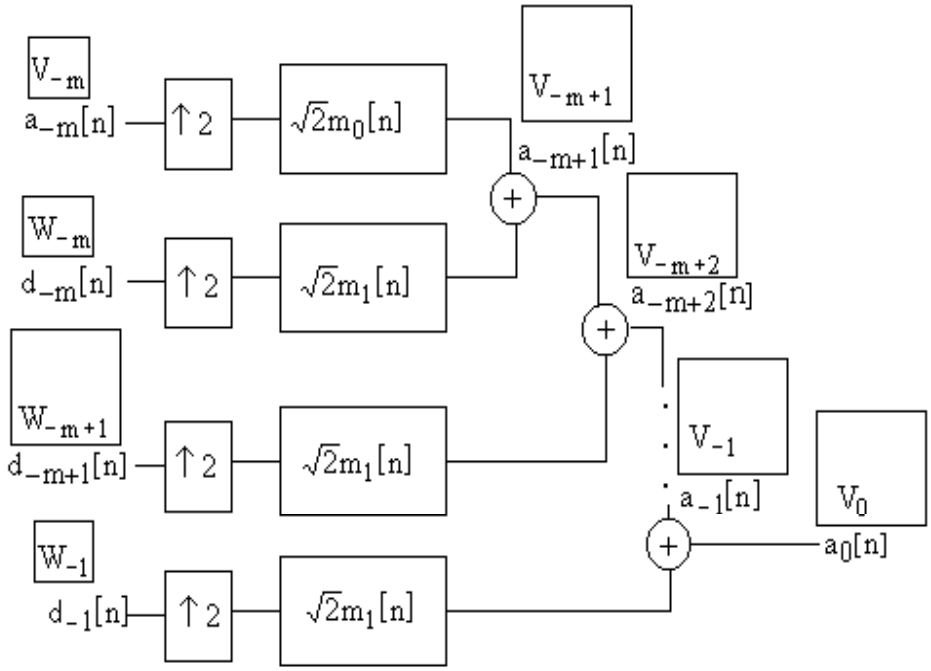


Figura 4.7.1.2.5 Sistemul numeric care implementază transformarea "wavelet" inversă.

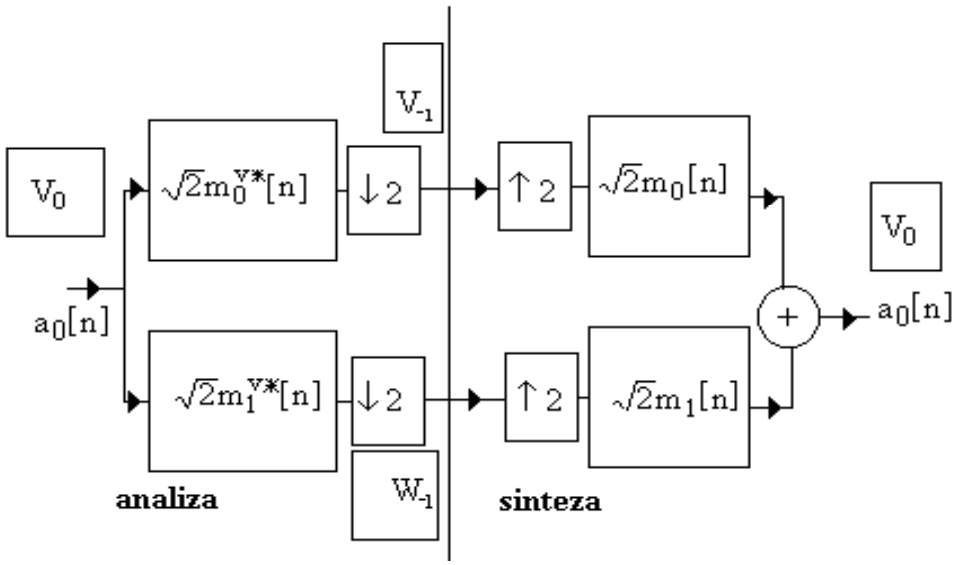


Figura 5.7.1.2.5 Sistem de analiză şi sinteză cu funcții "wavelet"

7.1.2.6 DERIVAREA ŞI INTEGRAREA ÎN ANALIZELE MULTIREZOLUȚIE

În paragraful 7.1.2.2 au fost prezentate câteva propoziții al căror scop era construcția unor noi analize multirezoluție pornind de la o anumită analiză multirezoluție, deja cunoscută. Acestea sunt: teorema 2.7.1.2.2, teorema 3.7.1.2.2 şi teorema 4.7.1.2.2. În acest paragraf se arată că şi operatorii de derivare şi integrare pot fi folosiți în acelaşi scop. Fie funcția de scară $\varphi(\tau)$. Transformata sa Fourier poate fi calculată folosind o relație de forma:

$$F\{\varphi\}(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} m_o\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$$

De aceea transformata Fourier a derivatei $\varphi'(\tau)$ poate fi pusă în forma:

$$F\{\varphi'\}(\omega) = -j\,\omega \prod_{n=1}^{\infty} m_o\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$$

Ținând însă seama de forma generală a răspunsului $m_o(\omega)$:

$$m_o(\omega) = \left(\frac{1 + e^{j\omega}}{2}\right)^N P(\omega)$$

ultima relație devine:

$$F\{\varphi'\}(\omega) = -j\,\omega \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{j\frac{\omega}{2^n}}}{2}\right)^N \prod_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \tag{244}$$

Dar:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{j\frac{\omega}{2^n}}}{2}\right)^N = \left(\operatorname{sinc}\frac{\omega}{2}\right)^N \tag{245}$$

Deci:

$$F\{\varphi'\}(\omega) = -j\,\omega \left(\operatorname{sinc}\frac{\omega}{2}\right)^N \prod_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \tag{246}$$

Dar:

$$-j\,\omega\left(\operatorname{sinc}\frac{\omega}{2}\right)^{N} = -j\,\omega\left(\operatorname{sinc}\frac{\omega}{2}\right)^{N-1} sinc\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left(e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}\right)\left(\operatorname{sinc}\frac{\omega}{2}\right)^{N-1}$$

În consecință relația (246) se mai scrie:

$$F\{\varphi'\}(\omega) = \left(e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}\right)\left(\operatorname{sinc}\frac{\omega}{2}\right)^{N-1}\prod_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$$

sau pe baza relației (245):

$$F\{\varphi'\}(\omega) = \left(e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+e^{j\frac{\omega}{2^n}}}{2}\right)^{N-1} P\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$$

Folosind notația:

$${}_1m_0(\omega) = \left(\frac{1+e^{j\omega}}{2}\right)^{N-1} P(\omega)$$

se obține:

$$F\{\varphi'\}(\omega) = \left(e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}\right)\prod_{n=1}^{\infty} {}_1m_0\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$$

Fie ${}_1\varphi(\tau)$ funcția de scară corespunzătoare filtrului cu răspunsul în frecvență ${}_1m_0(\omega)$. Ultima relație devine:

$$F\{\varphi'\}(\omega) = \left(e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}\right) F\{{}_1\varphi\}(\omega)$$

sau:

$$\varphi'(\tau) = {}_1\varphi\left(\tau - \frac{1}{2}\right) - {}_1\varphi\left(\tau + \frac{1}{2}\right)$$

Având în vedere că ${}_1\varphi(\tau)$ este o funcție de scară rezultă că și $\varphi'(\tau)$ este o funcție de scară. Mai multe despre legătura dintre operatorii de derivare și conceptul de analiză multirezoluție pot fi găsite în [135] și în [97].

7.1.2.7 VARIAŢIUNI PE TEMA BAZELOR ORTONORMALE DE FUNCŢII "WAVELET" CU SUPORT COMPACT

În articolul său [43], Ingrid Daubechies revine asupra subiectului bazelor ortonormale de funcţii "wavelets" cu suport compact. În acest articol autoarea studiază următoarele probleme:

1. Creşterea simetriei funcţiilor φ şi ψ,
2. Creşterea localizării în frecvenţă,
3. Creşterea numărului de momente nule ale funcţiilor φ şi ψ.

1. Nu pot fi determinate funcţii de tipul "wavelets mother" cu suport compact, înafara funcţiei ψ_H, simetrice, deoarece filtrele $m_o(\omega)$ corespunzătoare nu pot avea caracteristica de fază liniară. Totuşi având în vedere că pentru fiecare filtru $m_{o_{D\,k}}(\omega)$, $k = \overline{2,10}$ există mai multe alegeri posibile (pentru k = 2, ecuaţia (229) are mai multe soluţii posibile) se poate pune problema care dintre acestea conduce la un filtru a cărui caracteristică de fază este cel mai apropiată de una liniară. De fapt numărul de alegeri posibile este $2^{\left[\frac{N}{2}\right]}$.Fiecare dintre aceste alegeri presupune fixarea unei mulţimi de rădăcini ale ecuaţiei:

$$m_{o_{D\,k}}(\omega) = 0 \tag{247}$$

Acestea reprezintă o submulţime a mulţimii soluţiilor ecuaţiei:

$$\left|m_{o_{D\,k}}(\omega)\right|^2 = 0 \tag{248}$$

Dar elementele acestei mulţimi pot fi grupate în perechi de rădăcini complex conjugate. Fiecare element al mulţimii rădăcinilor ecuaţiei (247) aparţine unei perechi de elemente (complex conjugate) din mulţimea rădăcinilor ecuaţiei (248). Bineînţeles că o altă alegere posibilă a filtrului $m_{o_{D\,k}}(\omega)$ poate fi făcută alegând ca rădăcini ale ecuaţiei (247) celelalte elemente ale perechilor din mulţimea rădăcinilor ecuaţiei (248).

În acest mod se obţine însă un răspuns în frecvenţă complex conjugat. Caracteristica de fază a acestuia este la fel de neliniară ca şi caracteristica de fază a filtrului de la care s-a pornit. În consecinţă numărul de alegeri posibile ale răspunsului în frecvenţă $m_{o_{D\,k}}(\omega)$ este de $2^{\left[\frac{N}{2}\right]-1}$. De aceea pentru N = 2 şi N = 3 există o singură alegere posibilă (pentru N = 2 este cea corespunzătoare relaţiei (230)).

În tabelul următor sunt listaţi coeficienţii filtrelor cu răspunsurile în frecvenţă $m_{o_{D\,k}}(\omega)$ care au caracteristica de fază cea mai apropiată de una liniară, pentru k cuprins între 4 şi 10.

	n	$C_{N,n}$		n	$C_{N,n}$
N = 4	0	- 0.075765714789	N = 8	5	- 0,027219029916
	1	- 0,029635527645		6	- 0,051194583810
	2	0,497618667632		7	0,364441894836
	3	0,803738751805		8	0,777185751699
	4	0,297857795605		9	0,481359651259
	5	0,099219543576		10	- 0,061273359167
	6	0,012603967262		11	- 0,143294238351
	7	0,032223100604		12	0,007607487325
N = 5	0	0,027333068345		13	0,031695087810
	1	0,029519490926		14	- 5,4213233163560 e5
	2	- 0,039134249302		15	0,003382415951
	3	0,199397533977	N = 9	0	0,001069490032
	4	0,723407690040		1	- 4,731544985873 e5
	5	0,633978963456		2	0,010264064027
	6	0,016602105764		3	0,008859267493
	7	- 0,175328089908		4	0,062077789302
	8	- 0,021101834024		5	- 0,018233770779
	9	0,019538882735		6	- 0,191550831296
N = 6	0	0,015404109327		7	0,035272488035
	1	0,003490712084		8	0,617338449140
	2	- 0,117990186193		9	0,717897082763
	3	- 0,048311742373		10	0,238760914607
	4	0,491055941927		11	- 0,054568958430
	5	0,787641141028		12	5,834627463305 e4
	6	0,337929421728		13	0,030224878857
	7	- 0,072637522786		14	- 0,011528210207
	8	- 0,021060292512		15	- 0,013271967781
	9	0,044724901770		16	6,197808890541 e4
	10	0,001767711864		17	0,001400915225
	11	- 0,007800708324	N = 10	0	7,701598089417 e4
N = 7	0	0,002681814568		1	9,563267176371 e5
	1	- 0,001047384888		2	- 0,008641299274
	2	- 0,012638303403		3	- 0,001465382583
	3	0,030515513165		4	0,045927239214
	4	0,067892693501		5	0,011609893910
	5	- 0,049552834937		6	- 0,159494278824
	6	0,017441255087		7	- 0,070880535796
	7	0,536101917090		8	0,471690666743
	8	0,767764317004		9	1,769510036853
	9	0,288629631751		10	0,383826761145
	10	- 0,140047240442		11	- 0,035536740298
	11	- 0,107808237703		12	- 0,031990056821
	12	0,004010244871		13	0,049994972068
	13	0,010268176708		14	0,005764912044
N = 8	0	0,001889950332		15	- 0,020354939799
	1	- 3,0292051455170 e4		16	- 8,043589343686 e4
	2	- 0,014952258336		17	0,004593173582
	3	0,003808752014		18	5,703608432707 e5
	4	0,261269214029		19	4,593294204519 e4

Tabelul 1.7.1.2.7. Coeficienții filtrelor Daubechies cu faza cea mai apropiată de una liniară.

În figura 1.7.1.2.7 sunt date câteva exemple de funcții de scară respectiv de funcții de tipul "wavelets mother" generate folosind tabelul de mai sus.

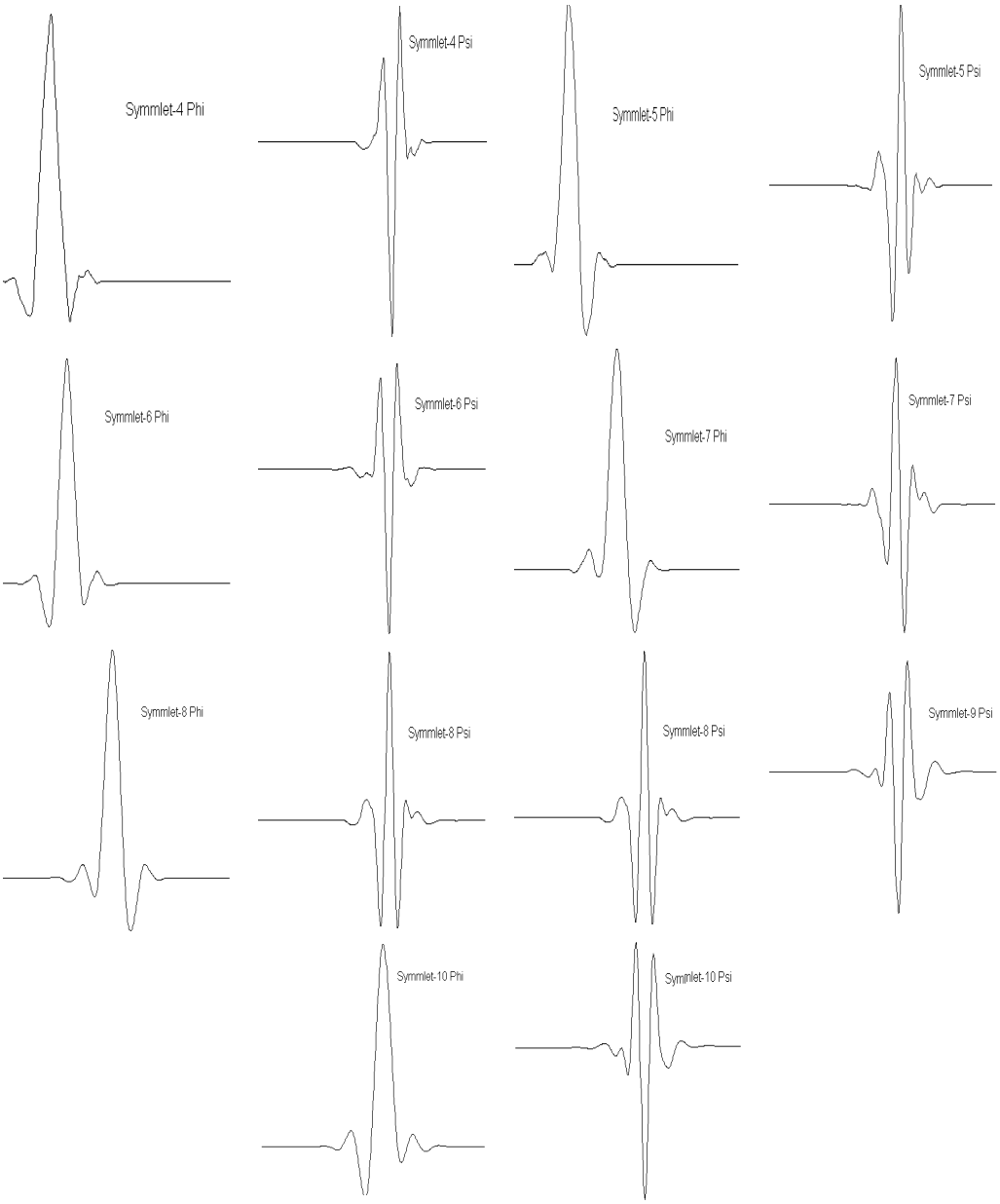


Figura 1.7.1.2.7. Funcțiile de scară şi wavelets mother de tip Symmlet pentru N cuprins între 2 şi 10.

Rezultatele obținute sunt valabile în ipoteza că la o valoare a lui N impusă, funcția ${}_N\psi(\tau)$ are N momente nule şi lungimea suportului funcției ${}_N\psi(\tau)$ este 2N - 1. Dacă se acceptă o lungime mai mare pentru suportul funcției ${}_N\psi(\tau)$, atunci aceasta poate fi făcută să fie şi mai simetrică [43].

În paragraful 7.1.2.4 au fost utilizate doar filtre (cu răspunsurile în frecvență $m_{o_k}(\omega)$, $m_{1_k}(\omega)$) cu răspunsuri la impuls funcții reale. În [64] se afirmă că dacă răspunsurile la impuls sunt funcții complexe, atunci se pot construi funcții ${}_N\varphi$ şi ${}_N\psi$ perfect simetrice.

Răspunsul la impuls $m_o[n]$ este simetric dacă este îndeplinită condiția:

$$m_o[n] = m_o[N - 1 - n]$$

Cu N s-a notat numărul de coeficienți nenuli ai răspunsului la impuls, $m_o[n]$. Ultima relație se scrie în domeniul frecvență în forma:

$$m_o(\omega) = e^{-j\omega(N-1)}\, m_o(-\omega) \tag{249}$$

În cazul construcției funcțiilor "wavelets mother", cu suport compact, generatoare de baze ortonormale ale lui $L^2(R)$ propuse de Ingrid Daubechies, descrisă mai devreme, se folosea descompunerea:

$$\left|m_o(\omega)\right|^2 = m_o(\omega)\, m_o^*(\omega) = m_o(\omega)\, m_o(-\omega)$$

deoarece funcția $m_0[n]$ era considerată reală.

Dacă se renunță la această ipoteză atunci:

$$m_o^*(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} m_o^*[n]\, e^{jn\omega}$$

Cu notația:

$$m_{o*}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} m_o^*[n]\, e^{-jn\omega}$$

ultima relație devine:

$$m_o^*(\omega) = m_{o*}(-\omega) \tag{250}$$

De aceea pentru determinarea zerourilor funcţiei $m_o(\omega)$, zerourile polinomului $Q(\omega)$ (definit în relaţia (226)) trebuiesc realocate în acord cu relaţia:

$$m_o(\omega)\, m_{o*}(-\omega) = Q(\omega) \tag{251}$$

Realocarea trebuie făcută în aşa fel încât să fie satisfăcută relaţia (249).

2. Problema îmbunătăţirii localizării în domeniul frecvenţă a funcţiilor "wavelet", elemente ale unor baze ortonormale ale spaţiului $L^2(R)$ este analizată în [32].

Transformatele Fourier a funcţiilor "wavelets mother" ψ, generatoare de baze ortonormale ale spaţiului $L^2(R)$ se concentrează într-o anumită bandă de frecvenţe . De exemplu pentru funcţia lui Meyer, $\psi_M(\tau)$, (definită prin relaţia (161)), banda de frecvenţe este cuprinsă în intervalul $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$.

În cazul funcţiilor "wavelets mother" introduse de Ingrid Daubechies suportul frecvenţial nu este finit, deoarece acestea au suport temporal compact. Totuşi transformatele lor Fourier au viteză mare de scădere în interiorul intervalului:

$$\pi \le |\omega| \le 2\pi$$

De aceea se poate afirma că lungimea efectivă a benzilor de frecvenţe ale acestor funcţii este de ordinul de mărime al unei octave. Această localizare frecvenţială este datorată alegerii valorii 2 pentru factorul de dilatare a_o (definit în paragraful 7.1.2).

Uneori se doreşte o localizare frecvenţială mai bună. În continuare se prezintă două metode pentru creşterea localizării frecvenţiale a funcţiilor generatoare de baze ortonormale de funcţii "wavelet", inspirate din teoria cadrelor pe mai multe voci (descrisă la sfârşitul paragrafului 7.1.2).

Deoarece valoarea lăţimii de bandă de o octavă este impusă de valoarea 2 a factorului de dilatare, rezultă că o cale naturală de a obţine o lăţime de bandă mai îngustă este să se utilizeze un factor de dilatare de valoare mai mică, de exemplu $3/2$.

Din nefericire, folosind factori de dilatare neîntregi nu pot fi construite analize multirezoluţie descrise de funcţii de scară cu suport compact, care să genereze funcţii "wavelets mother" cu suport compact.

Pentru $a_o = 3/2$, spaţiul V_o ar trebui să fie generat de baza $\{{}_o\varphi(\tau - n)\}_{n \in Z}$ iar spaţiul V_1 de baza $\left\{\sqrt{\frac{3}{2}}\,{}_o\varphi\left(\frac{3}{2}\tau - n\right)\right\}_{n \in Z}$.

Ţinând seama de faptul că V_o este inclus în V_1 rezultă că se pot scrie relaţiile:

$$\begin{cases} {}_{o}\varphi(\tau) = \sum_{n} c_{1,n}\ {}_{o}\varphi\left(\frac{3}{2}\tau - n\right) \\ {}_{o}\varphi(\tau - 1) = \sum_{n} c_{2,n}\ {}_{o}\varphi\left(\frac{3}{2}\tau - n\right) \end{cases} \tag{252}$$

Dacă funcția ${}_{o}\varphi(\tau)$ ar avea suport compact, atunci secvențele $c_{1,n}$ și $c_{2,n}$ ar trebui să fie de durate finite.

Trecând în domeniul frecvență, relația (252) devine:

$$\begin{cases} F\left\{{}_{o}\varphi\right\}(\omega) = \sum_{n} c_{1,n}\ F\left\{{}_{o}\varphi\right\}\left(\frac{2}{3}\ \omega\right)\ \frac{2}{3}\ e^{-j\omega\frac{2}{3}n} \\ e^{-j\omega}\ F\left\{{}_{o}\varphi\right\}(\omega) = \sum_{n} c_{2,n}\ F\left\{{}_{o}\varphi\right\}\left(\frac{2}{3}\ \omega\right)\ \frac{2}{3}\ e^{-j\omega\frac{2}{3}n} \end{cases} \tag{253}$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$u = \frac{2}{3}\ \omega$$

se poate scrie:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\ F\left\{{}_{o}\varphi\right\}\left(\frac{3}{2}\ u\right) = \sum_{n} c_{1,n}\ e^{-jun}\ F\left\{{}_{o}\varphi\right\}(u) \\ \frac{3}{2}\ e^{-j\frac{3}{2}u}\ F\left\{{}_{o}\varphi\right\}\left(\frac{3}{2}\ u\right) = \sum_{n} c_{2,n}\ e^{-jun}\ F\left\{{}_{o}\varphi\right\}(u) \end{cases} \tag{254}$$

Rezultă:

$$\sum_{n} c_{1,n}\ e^{-jun}\ F\left\{{}_{o}\varphi\right\}(u) = e^{j\frac{3}{2}u} \sum_{n} c_{2,n}\ e^{-jun} \tag{255}$$

Dacă secvențele $c_{1,n}$ și $c_{2,n}$ ar fi de durată finită, atunci transformatele lor Fourier în timp discret ar trebui să fie polinoame de variabilă e^{-ju}. Notând polinomul asociat secvenței $c_{1,n}$ cu $P\left(e^{-ju}\right)$ relația (255) se scrie:

$$P\left(e^{-ju}\right) = e^{j\frac{3}{2}u}\, Q\left(e^{-ju}\right)$$

sau cu schimbarea de variabilă:

$$e^{-ju} = v$$

$$P(v) = \frac{Q(v)}{v^{3/2}}$$

Dar, chiar dacă $Q(v)$ este un polinom, $P(v)$ nu mai este o funcție polinomială. În consecință ipoteza făcută (că secvențele $c_{1,n}$ şi $c_{2,n}$ sunt de durată limitată) este falsă. Deci funcția ${}_o\varphi(\tau)$ nu poate avea suport compact. La fel se întâmplă pentru orice valoare neîntreagă a factorului de dilatare, a_o. Deci nu poate fi vorba ca o singură funcție ${}_o\varphi$ cu suport compact să genereze o analiză multirezoluție a lui $L^2(R)$ cu a_o de valoare fracționară. S-ar putea construi o astfel de analiză multirezoluție pornind de la mai multe funcții ${}_o\varphi$, aşa cum sugerează modelul cadrului pe mai multe voci.

A doua metodă de creştere a localizării frecvențiale a funcției "wavelets mother" cu suport compact generatoare de baze ortonormale a lui $L^2(R)$ este bazată pe folosirea unor factori de dilatare întregi, de valoare superioară lui 2. Pentru construcția unei analize multirezoluție folosind un factor de dilatare N (N > 2) este necesară o funcție de scalare φ şi N - 1 funcții "wavelets mother" diferite ψ_l, $l = \overline{1, N-1}$. Funcția de scară trebuie să satisfacă o condiție de forma:

$$ {}_o\varphi(\tau) = \sum_n a_n\, {}_o\varphi(N\tau - n) \qquad (256)$$

Trecând în domeniul frecvență se obține:

$$F\left\{{}_o\varphi\right\}(\omega) = \frac{1}{N}\sum_n a_n\, e^{-j\frac{\omega}{N}n}\, F\left\{{}_o\varphi\right\}\left(\frac{\omega}{N}\right)$$

Folosind notația:

$$m_o(\omega) = \frac{1}{N}\sum_n a_n\, e^{-j\omega n}$$

ultima relație devine:

$$F\{{}_{o}\varphi\}(\omega) = m_o\left(\frac{\omega}{N}\right) F\{{}_{o}\varphi\}\left(\frac{\omega}{N}\right) \tag{257}$$

Funcțiile $\psi_l(\tau)$, $l = \overline{1, N-1}$ se exprimă ca şi combinații liniare ale elementelor mulțimii $\{{}_{o}\varphi(N\tau - n)\}_{n \in Z}$.

Presupunând că funcțiile ${}_{o}\varphi$ şi ψ_l, $l = \overline{1, N-1}$ au suporturi compacte rezultă că există polinoame trigonometrice ${}_{l}m(\omega)$, $l = \overline{1, N-1}$ care să satisfacă relații de forma:

$$F\{\psi_l\}(\omega) = {}_{l}m\left(\frac{\omega}{N}\right) F\{{}_{o}\varphi\}\left(\frac{\omega}{N}\right)$$

Mulțimea $\{{}_{o}\varphi(N\tau - n), \psi_1(\tau - n), \ldots, \psi_{N-1}(\tau - n)\}_{n \in Z}$ generează spațiul ${}_{i}V_o$ al analizei multirezoluție inițiale. Mulțimea $\{{}_{o}\varphi(N\tau - n)\}_{n \in Z}$ generează spațiul ${}_{n}V_{oo}$ al spațiului V_o, iar mulțimea $\{\psi_l(\tau - n)\}_{n \in Z}$ generează subspațiul ${}_{n}W_{ol}$ al spațiului V_o.

În continuare se prezintă modul în care se face trecerea de la o analiză multirezoluție obişnuită la o analiză multirezoluție cu N = 4. Analiza multirezoluție inițială este generată cu ajutorul filtrului numeric cu răspunsul în frecvență $m_o(\omega)$.

Pe baza sa se construiesc 4 noi filtre:

$$\begin{cases} {}_{o}m(\omega) = m_o(\omega)\, m_o(2\omega) \\ {}_{1}m(\omega) = m_o(\omega)\, m_1(2\omega) \\ {}_{2}m(\omega) = m_1(\omega)\, m_1(2\omega) \\ {}_{3}m(\omega) = m_1(\omega)\, m_o(2\omega) \end{cases} \tag{258}$$

unde:

$$m_1(\omega) = e^{j\omega}\, m_o^*(\omega + \pi) \tag{259}$$

Cu ajutorul filtrului ${}_{o}m(\omega)$ se generează ${}_{n}V_{oo}$. Cu ajutorul filtrelor ${}_{l}m(\omega)$, $l = \overline{1, 3}$ se generează subspațiile ${}_{n}W_{o,l}$.

Condiția ca toate aceste subspații să fie ortogonale între ele este ca matricea $M(\omega)$, al cărei elemente sunt:

$$M_{l,k}(\omega) = {}_{l-1}m\left(\omega + \frac{2\pi}{4}(k-1)\right), \quad l = \overline{1,4}; \quad k = \overline{1,4}$$

să fie unitară pentru orice valoare a lui ω , [32]. Această condiţie poate fi verificată prin calcul. (Se foloseşte relaţia: $|m_o(\omega)|^2 + |m_o(\omega+\pi)|^2 = 1$).

Funcţia de scară a noii analize multizeroluţie se determină cu formula:

$$F\{{}_{no}\varphi\}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} {}_{o}m\left(4^{-p}\omega\right)$$

Dar:

$${}_{o}m\left(4^{-p}\omega\right) = m_o\left(2^{-2p}\omega\right) m_o\left(2^{-(2p-1)}\omega\right)$$

De aceea:

$$F\{{}_{no}\varphi\}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} m_o\left(2^{-2p}\omega\right) m_o\left(2^{-(2p-1)}\omega\right) = \prod_{p=1}^{\infty} m_o\left(2^{-p}\omega\right) = F\{{}_{o}\varphi_n\}(\omega)$$

În consecinţă:

$${}_{no}\varphi(\tau) = {}_{o}\varphi_n(\tau) \tag{260}$$

Prin scalare cu 4 şi translaţie cu întregi se obţin mulţimile $\{{}_{no}\varphi\left(4^m\tau - k\right)\}_{k\in Z}$. Acestea sunt baze ortonormale în spaţiile ${}_{n}V_{m,o}$ ale noii analize multirezoluţie. Spaţiile ${}_{i}V_{p}$ ale analizei multirezoluţie iniţiale erau generate de bazele ortonormale $\{{}_{o}\varphi\left(2^p\tau - k\right)\}_{k\in Z}$.

Se constată că este valabilă relaţia:

$${}_{i}V_{2m} = {}_{n}V_{m,o} \tag{261}$$

Funcţiile "wavelets mother" ale noii analize multirezoluţie au transformatele Fourier date de expresiile:

$$F\{\psi_l\}(\omega) = {}_{l}m\left(\frac{\omega}{4}\right) F\{{}_{o}\varphi\}\left(\frac{\omega}{4}\right), \; l = \overline{1,3}$$

Pentru $l = 1$ se obţine:

$$F\{\psi_1\}(\omega) = {}_1m\left(\frac{\omega}{4}\right) F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

sau pe baza relației (258):

$$F\{\psi_1\}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) m_o\left(\frac{\omega}{4}\right) F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\omega}{4}\right) \quad (262)$$

Dar în cazul analizei multirezoluție inițială era valabilă relația:

$$F\{{}_o\varphi\}(\omega) = m_o\left(\frac{\omega}{2}\right) F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

În consecință relația (262) poate fi rescrisă în forma:

$$F\{\psi_1\}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (263)$$

Dar acestea sunt tocmai relația de definiție a funcției "wavelets mother" asociată analizei multirezoluție inițiale, ψ. În consecință:

$$\psi_1(\tau) = \psi(\tau), \ (\forall)\ \tau \in R$$

De aceea se poate scrie:

$${}_iW_{2\,m} = {}_nW_{m,\,1}$$

Pentru $l = 2$ se poate scrie:

$$F\{\psi_2\}(\omega) = {}_2m\left(\frac{\omega}{4}\right) F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

sau pe baza relației (258):

$$F\{\psi_2\}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{4}\right) m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

adică:

$$F\{\psi_2\}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) F\{\psi\}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (264)$$

În sfârşit, pentru $l = 3$ se poate scrie:

$$F\{\psi_3\}(\omega) = {}_3m\left(\frac{\omega}{4}\right) F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

sau:

$$F\{\psi_3\}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{4}\right) m_o\left(\frac{\omega}{2}\right) F\{{}_o\varphi\}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

adică:

$$F\{\psi_3\}(\omega) = m_o\left(\frac{\omega}{2}\right) F\{\psi\}\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad (265)$$

Mulţimile $\{\psi_2(4^m\tau - k)\}_{k \in Z}$ generează spaţiul ${}_nW_{2m,2}$ iar mulţimile $\{\psi_3(4^m\tau - k)\}_{k \in Z}$ generează spaţiul ${}_nW_{2m,3}$.

Funcţiile ψ_1 şi ψ_2 nu aveau nici o semnificaţie în analiza multirezoluţie iniţială. Ele sunt însă elementele din noua analiză multirezoluţie iniţială care au localizarea frecvenţială îmbunătăţită. În cadrul noii analize multirezoluţie se poate scrie:

$${}_nV_{m,o} = {}_nV_{m-1,o} \oplus {}_nW_{m-1,1} \oplus {}_nW_{m-1,2} \oplus {}_nW_{m-1,3}$$

Ţinând seama de legătura dintre elementele analizei multirezoluţie iniţială şi elementele noii analize multirezoluţie ultima relaţie devine:

$${}_iV_{2m} = {}_iV_{2m-2} \oplus {}_iW_{2m-2} \oplus {}_nW_{m-1,2} \oplus {}_nW_{m-1,3}$$

sau ţinând seama de legătura dintre elementele analizei multirezoluţie iniţială şi elementele descompunerii ortogonale asociate, ultima relaţie devine:

$${}_iV_{2m} = {}_iV_{2m-1} \oplus {}_nW_{m-1,2} \oplus {}_nW_{m-1,3}$$

În consecinţă spaţiile ${}_nW_{m-1,2}$ şi ${}_nW_{m-1,3}$ trebuie să satisfacă relaţia:

$${}_iV_{2m-1} = {}_nW_{m-1,2} \oplus {}_nW_{m-1,3} \qquad (266)$$

În figura 2.7.1.2.7 se face o prezentare schematică a celor două analize multirezoluție studiate, $\{{}_{i}V_{m}\}_{m\in Z}$ şi $\{{}_{n}V_{m}\}_{m\in Z}$, în scopul comparării lor.

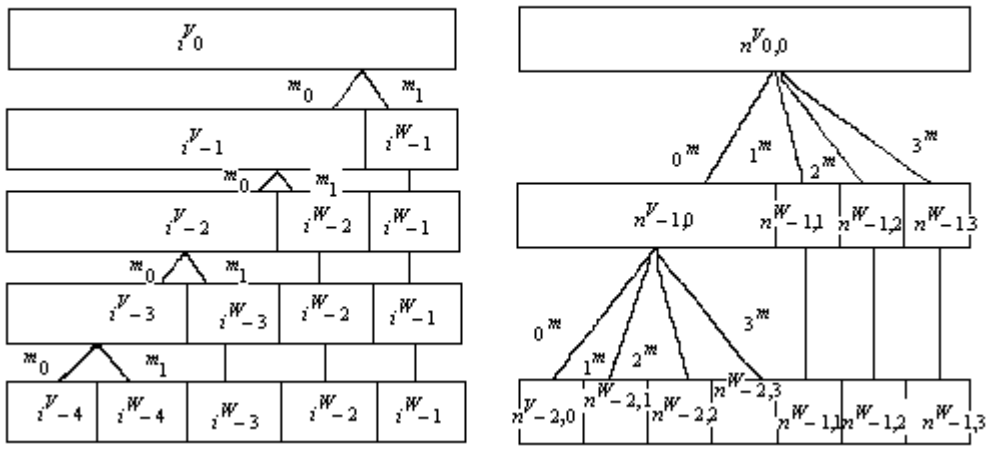


Figura 2.7.1.2.7 O comparație a celor două analize multirezoluție prezentate.

Pe baza relației (266) cele două scheme din figura 2.7.1.2.7 pot fi echivalate cu schema din figura 3.7.1.2.7. Se constată faptul că toate subspațiile W_m de indice impar corespunzătoare analizei multirezoluție inițială, ${}_{i}W_{2\,m\,-1}$, se descompun în câte două subspații corespunzătoare noii analize multirezoluție ${}_{n}W_{\,m\,-1,\,2}$ şi ${}_{n}W_{\,m\,-1,\,3}$. În timp ce spațiile ${}_{i}W_{2\,m\,-1}$ sunt generate de baza ortonormală $\{\psi_{2m-1,\,k}(\tau)\}_{k\in Z}$, spațiile ${}_{n}W_{\,m\,-1,\,2}$ şi ${}_{n}W_{\,m\,-1,\,3}$ sunt generate de bazele ortonormale $\{\psi_{2}(4^{m-1}\tau-k)\}_{k\in Z}$ respectiv $\{\psi_{3}(4^{m-1}\tau-k)\}_{k\in Z}$. Pe baza relațiilor (264) şi (265) se constată că semnalele $\psi_2(\tau)$ şi $\psi_3(\tau)$ se obțin prin filtrarea semnalului $\psi\left(\frac{\tau}{2}\right)$ folosind filtrele cu răspunsurile în frecvență $m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)$ şi $m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Despre funcția $\psi(\tau)$ s-a presupus mai devreme că transformata sa Fourier se concentrează în banda de frecvență $[\pi, 2\pi]$. În consecință spectrul semnalului $\psi\left(\frac{\tau}{2}\right)$ se concentrează în banda $[2\pi, 4\pi]$.

Sistemele cu răspunsurile în frecvență $m_0(\omega)$ și $m_1(\omega)$ sunt filtre numerice de tip

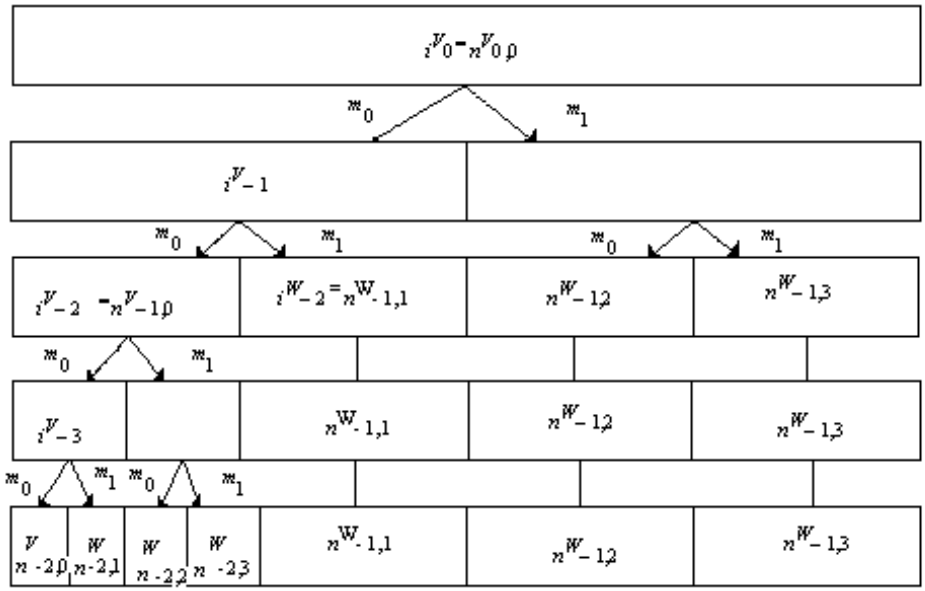


Figura 3.7.1.2.7 O reprezentare echivalentă a celor două analize multirezoluție.

trece jos respectiv trece sus. De aceea funcțiile $m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)$ și $m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)$ se concentrează în intervale de forma $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ respectiv $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in Z$. În consecință spectrele semnalelor $\psi_2(\tau)$ și $\psi_3(\tau)$ se concentrează în intervalele: $[2\pi, 3\pi]$ respectiv $[3\pi, 4\pi]$. Se constată că lungimea acestor intervale este egală cu jumătate din lungimea intervalului $[2\pi, 4\pi]$. De aceea se spune că localizarea frecvențială a funcțiilor $\psi_2(\tau)$ și $\psi_3(\tau)$ este de ordinul unei semioctave.

Iată cum pot fi construite noi descompuneri ortogonale ale spațiului $L^2(R)$ bazate pe utilizarea unor funcții "wavelet" cu localizarea frecvențială îmbunătățită.

Subspațiile W_m de indice par, corespunzătoare analizei multirezoluție inițială, ${}_iW_{2n}$, sunt identice cu subspațiile ${}_nW_{m-1}$ corespunzătoare noii analize multirezoluție.

În continuare se arată cum poate fi îmbunătățită construcția anterioară, descompunând fiecarea spațiu ${}_iW_m$, corespunzător analizei multirezoluție inițială, în câte două subspații corespunzătoare noii analize multirezoluție. În acest scop se vor demonstra pentru început câteva rezultate ajutătoare. Relația:

$$\sum_n m_o[n]\, m_o[n+2k] \;=\; \frac{1}{2}\delta[k] \tag{267}$$

reprezintă primul dintre aceste rezultate.

Demonstrația acestei relații se bazează pe faptul că mulțimea $\{{}_o\varphi(\tau-n)\}_{n\in Z}$ este o bază ortonormală a spațiului V_o şi pe faptul că funcția generatoare a spațiului V_{-1}, ${}_o\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)$ se poate exprima în forma:

$$\frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right) \;=\; \sum_n m_o[n]\,\varphi(\tau-n) \tag{268}$$

Mulțimea $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi\left(\frac{\tau}{2}-n\right)\right\}_{n\in Z}$ este o bază ortonormală a spațiului V_{-1}. De aceea se poate scrie:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right),\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi\left(\frac{\tau}{2}-k\right)\right\rangle \;=\; \delta[k]$$

sau pe baza relației (268):

$$\left\langle \sqrt{2}\sum_n m_o[n]\,\varphi(\tau-n),\; \sqrt{2}\sum_p m_o[p]\,\varphi(\tau-2k-p)\right\rangle \;=\; \delta[k]$$

adică:

$$\sum_n m_o[n]\sum_p m_o^*[p]\left\langle \varphi(\tau-n)\,\varphi(\tau-2k-p)\right\rangle \;=\; \frac{1}{2}\,\delta[k]$$

sau:

$$\sum_n m_o[n]\, m_o^*[n-2k] \;=\; \frac{1}{2}\,\delta[k] \tag{269}$$

Dacă se consideră că funcția $m_o[n]$ este reală atunci se poate afirma că relația (267) a fost demonstrată.

Cel de-al doilea rezultat ajutător se referă la funcțiile:

$$\begin{cases} {}_1\psi(\tau) = \sqrt{2}\sum_n m_o[n]\ \psi(\tau - n) \\ {}_2\psi(\tau) = \sqrt{2}\sum_n (-1)^n\ m_o[1-n]\ \psi(\tau - n) \end{cases}$$

Se poate afirma că mulțimea $\left\{ {}_1\psi(\tau - 2n)\ ,\ {}_2\psi(\tau - 2n) \right\}_{n \in Z}$ este o altă bază ortonormală a spațiului W_o.

În continuare se demonstrează această afirmație. Pentru început se verifică ortonormalitatea mulțimii considerate.

Cazul I

$$\left\langle {}_1\psi(\tau - 2n),\ {}_1\psi(\tau - 2m) \right\rangle = 2\left\langle \sum_p m_o[p]\ \psi(\tau - 2n - p), \sum_q m_o[q]\ \psi(\tau - 2m - q) \right\rangle =$$

$$= 2\sum_p\sum_q m_o[p] m_o^*[q] \left\langle\ \psi(\tau - 2n - p),\ \psi(\tau - 2m - q) \right\rangle =$$

$$= 2\sum_p m_o[p] m_o^*[2n - 2m + p] = 2\sum_p m_o[p] m_o[p + 2(n-m)] = 2 \cdot \frac{1}{2}\,\delta[n-m]$$

Deci:

$$\left\langle {}_1\psi\ (\tau - 2n),\ {}_1\psi\ (\tau - 2m) \right\rangle = \delta\,[n-m]$$

Cazul II

$$\left\langle {}_2\psi(\tau - 2n),\ {}_2\psi(\tau - 2m) \right\rangle = 2\sum_p\sum_q (-1)^p m_o[1-p]\ (-1)^q m_o[1-q] \left\langle \psi(\tau - 2n - p), \right.$$

$$\left. \psi(\tau - 2m - q) \right\rangle = 2\sum_p (-1)^p m_o[1-p]\ (-1)^{p+2(n-m)} m_o[1-p-2(n-m)] =$$

$$= 2\sum_p m_o[1-p]\ m_o[1-p-2(n-m)]$$

sau făcând transformarea de indice:

$$l = 1 - p$$

ultima relație devine:

$$\left\langle {}_2\psi(\tau - 2n),\ {}_2\psi(\tau - 2m) \right\rangle = 2 \sum_l m_o[l]\, m_o[l + 2(m-n)] = 2 \cdot \frac{1}{2}\, \delta[m-n]$$

Deci:

$$\left\langle {}_2\psi(\tau - 2n),\ {}_2\psi(\tau - 2m) \right\rangle = \delta[m-n]$$

Cazul III

De fapt:

$${}_2\psi(\tau) = \sqrt{2} \sum_n m_1[n]\ \psi(\tau - n)$$

deoarece:

$$m_1[n] = (-1)^n\ m_o[1-n]$$

De aceea:

$$\begin{aligned} \left\langle {}_1\psi(\tau - 2n), {}_2\psi(\tau - 2m) \right\rangle &= 2 \sum_p \sum_q m_o[p]\, m_1[q] \left\langle \psi(\tau - 2n - p), \psi(\tau - 2m - q) \right\rangle = \\ &= 2 \sum_p m_o[p]\, m_1[p + 2n - 2m] \end{aligned} \tag{270}$$

Dar:

$$\sum_p m_o[p]\, m_1[p + 2n - 2m] = r_{m_o,\, m_1}[2(n-m)]$$

unde cu $r_{m_o,\, m_1}$ s-a notat intercorelația secvențelor reale $m_o[n]$ şi $m_1[n]$.

Întrucât:

$$r[2k] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[R(\Omega) + R(\Omega + \pi)\right]$$

ținând seama de expresia transformatei Fourier discrete a unei funcții de intercorelație, se poate scrie:

$$r_{m_o,\,m_1}[2k] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(m_o(\Omega)\,m_1^*(\Omega) + m_o(\Omega+\pi)\,m_1^*(\Omega+\pi)\right)$$

Dar conform relaţiei (198), membrul drept al ultimei relaţii este identic nul. În consecinţă:

$$(\forall)\ n \in Z \text{ şi } (\forall)\ m \in Z \quad r_{m_o,\,m_1}[2(n-m)] = 0$$

Pe baza relaţiei (270) rezultă că:

$$\left\langle {}_1\psi(\tau-2n),\ {}_2\psi(\tau-2m)\right\rangle = 0 \tag{271}$$

Deci mulţimea $\left\{{}_1\psi(\tau-2n),\ {}_2\psi(\tau-2n)\right\}_{n\in Z}$ este ortonormată. Mai rămâne să se demonstreze că această mulţime este completă în W_o.

Pentru aceasta ar trebui să dovedim că orice funcţie de forma:

$$x_o(\tau) = \sum_n\left[{}_1c_n\ {}_1\psi(\tau-2n) + {}_2c_n\ {}_2\psi(\tau-2n)\right]$$

este un element al lui W_o.
Pe baza relaţiei (269) relaţia (271) devine:

$$\begin{aligned} x_o(\tau) &= \sqrt{2}\sum_n {}_1c_n \sum_p m_o[p]\,\psi(\tau-2n-p) + \\ &+ \sqrt{2}\sum_n {}_2c_n \sum_q (-1)^q m_o[1-q]\,\psi(\tau-2n-q) \end{aligned} \tag{272}$$

Deci semnalul $x_o(\tau)$ este o combinaţie liniară a elementelor mulţimii: $\left\{\psi(\tau-k)\right\}_{k\in Z}$. Dar aceasta este bază ortonormală în W_o. În consecinţă orice semnal din W_o poate fi pus în forma (272). Deci mulţimea consideratã este completă. În consecinţă ea este o bază ortonormală a lui W_o. Pe baza faptului că $\left\{W_m\right\}_{k\in Z}$ este o descompunere ortogonală a lui $L^2(R)$ rezultă că mulţimea:

$$\left\{2^{\frac{m}{2}}\,{}_1\psi\left(2^m\tau-2n\right),\ 2^{\frac{m}{2}}\,{}_2\psi\left(2^m\tau-2n\right)\right\}_{m\in Z,\,n\in Z}$$

este o bază ortonormală a spațiului $L^2(R)$.

Atfel s-a demonstrat că spațiul ${}_iW_m$ poate fi descompus în subspațiile ortogonale ${}_nW_{m,1}$ şi ${}_nW_{m,2}$ generate de bazele ortonormale:

$$\left\{2^{\frac{m}{2}}{}_1\psi\left(2^m\tau-2n\right)\right\}_{n\in Z} \quad \text{şi} \quad \left\{2^{\frac{m}{2}}{}_2\psi\left(2^m\tau-2n\right)\right\}_{n\in Z}$$

Mai rămâne să se studieze localizarea în frecvență a funcțiilor ${}_1\psi(\tau)$ şi ${}_2\psi(\tau)$. Trecând în domeniul frecvență relația (269) devine:

$$\begin{cases} F\{{}_1\psi\}(\omega) = \sqrt{2}\, m_0(\omega)\; F\{\psi\}(\omega) \\ F\{{}_2\psi\}(\omega) = \sqrt{2}\, m_1(\omega)\; F\{\psi\}(\omega) \end{cases} \tag{273}$$

Având în vedere că funcția $m_0(\omega)$ descrie un filtru trece jos şi că funcția $m_1(\omega)$ descrie un filtru trece sus, rezultă că funcția $F\{{}_1\psi\}(\omega)$ se localizează în partea stângă a zonei de localizare a funcției $F\{\psi\}(\omega)$ şi că funcția $F\{{}_2\psi\}(\omega)$ se localizează în partea dreaptă a zonei de localizare a funcției $F\{\psi\}(\omega)$. De aceea se poate afirma că funcțiile ${}_1\psi$ şi ${}_2\psi$ sunt mai bine localizate decât funcția ψ. O descompunere a spațiului $L^2(\mathrm{R})$ care foloseşte tehnica prezentată mai sus este schematizată în figura 4.7.1.2.7.

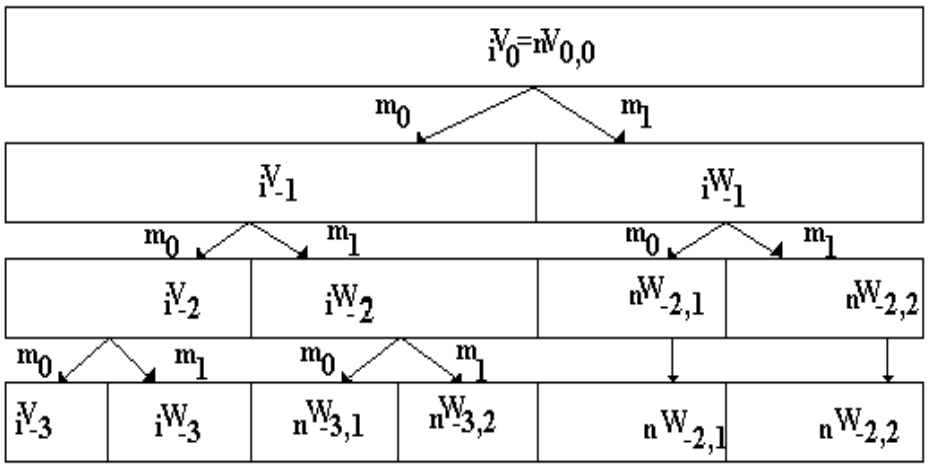


Figura 4.7.1.2.7 O nouă descompunere ortogonală a spațiului $L^2(\mathrm{R})$.

În continuare se dă un exemplu de construcție a funcțiilor ${}_1\psi$ şi ${}_2\psi$. Să considerăm că funcția ψ ar fi funcția wavelet de tip Haar:

$$\psi(\tau) = \psi_H(\tau)$$

şi să considerăm că filtrele $m_o(\omega)$ şi $m_1(\omega)$ ar fi cele introduse de Ingrid Daubechies:

$$m_{o_{D2}}[n] = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{8}, & n = 0 \\ \frac{3+\sqrt{3}}{8}, & n = 1 \\ \frac{3-\sqrt{3}}{8}, & n = 2 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{8}, & n = 3 \\ 0, & in\ rest \end{cases}$$

Se obțin funcțiile:

$${}^{D2}_{1}\psi_H(\tau) = \sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{8}\psi_H(\tau) + \sqrt{3}\,\frac{1+\sqrt{3}}{8}\psi_H(\tau-1) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}-1}{8}\psi_H(\tau-2) + \frac{1-\sqrt{3}}{8}\psi_H(\tau-3)\right)$$

$${}^{D2}_{2}\psi_H(\tau) = \sqrt{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{8}\psi_H(\tau+2) - \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}-1}{8}\psi_H(\tau+1) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}+1}{8}\psi_H(\tau) - \frac{1+\sqrt{3}}{8}\psi_H(\tau-1)\right)$$

cu graficele din figura 5.7.1.2.7:

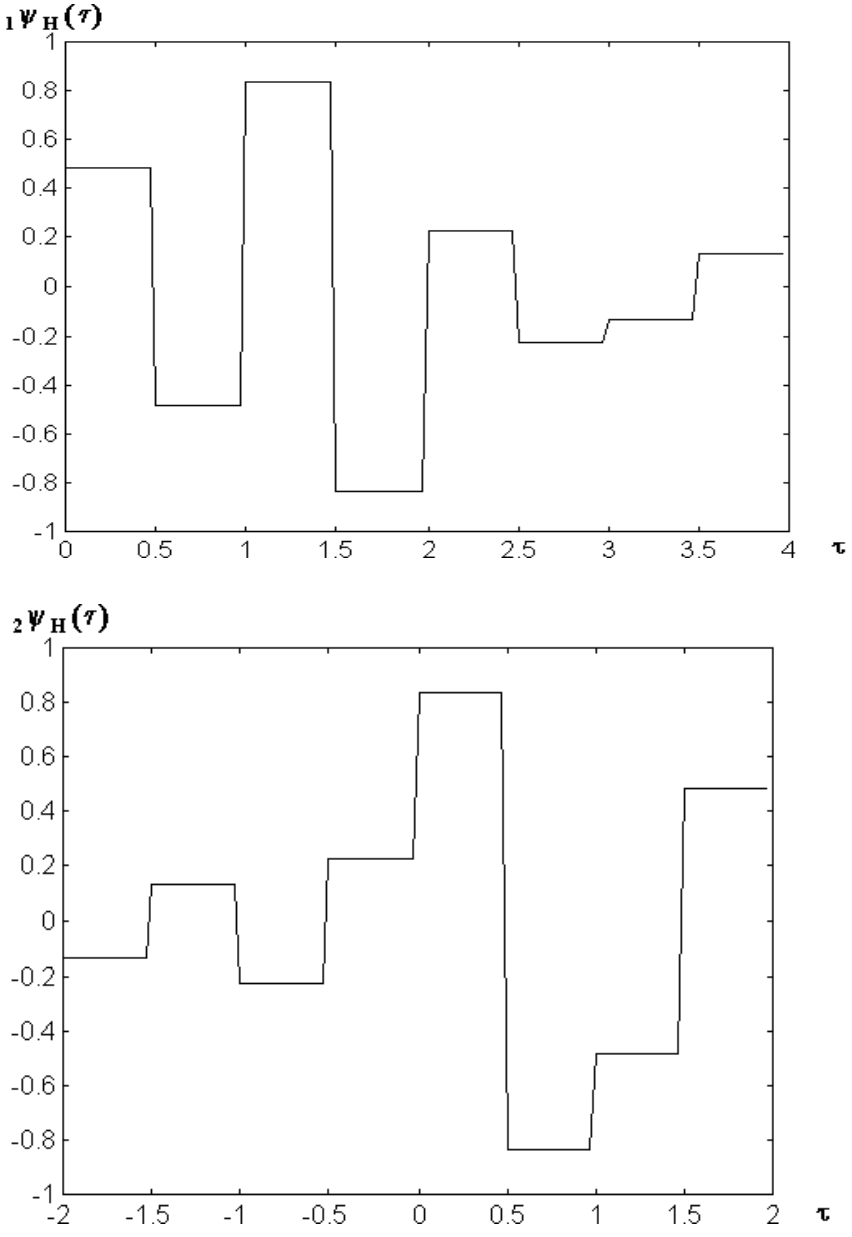


Figura 5.7.1.2.7 Un exemplu de construcție a unor funcții "wavelets" mai bine localizate în frecvență decât funcția lui Haar.

Se compară spectrele semnalelor $\psi_H(\tau)$, ${}^{D}{}_{1}^{2}\psi_H(\tau)$ şi ${}^{D}{}_{2}^{2}\psi_H(\tau)$.

$$F\{\psi_H(\tau)\}(\omega) = \int_0^{1/2} e^{-j\omega\tau}d\tau - \int_{1/2}^{1} e^{-j\omega\tau}d\tau = -\frac{1}{j\omega}\int_0^{1/2} d\left(e^{-j\omega\tau}\right) + \frac{1}{j\omega}\int_{1/2}^{1} d\left(e^{-j\omega\tau}\right) =$$

$$= -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega\tau}\Big|_0^{1/2} - e^{-j\omega\tau}\Big|_{1/2}^{1}\right] = -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\frac{\omega}{2}} - 1 - e^{-j\omega} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{j\omega}\left[1 + e^{-j\omega} - 2e^{-j\frac{\omega}{2}}\right] = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}}{j\omega}\left[2\cos\frac{\omega}{2} - 2\right] = \frac{2e^{-j\frac{\omega}{2}}}{j\omega}\left(\cos\frac{\omega}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{2e^{-j\frac{\omega}{2}}}{j\omega}\left(\cos^2\frac{\omega}{4} - \sin^2\frac{\omega}{4} - 1\right) = \frac{-4e^{-j\frac{\omega}{2}}}{j\omega}\sin^2\frac{\omega}{4} = je^{-j\frac{\omega}{2}}\frac{\sin\frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}}\sin\frac{\omega}{4}$$

Deci:

$$F\{\psi_H(\tau)\}(\omega) = j\, e^{-j\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{4}\,\sin\frac{\omega}{4} \tag{274}$$

Pe baza relaţiei (273) se poate scrie:

$$F\{{}^{D}{}_{1}^{2}\psi_H\}(\omega) = \sqrt{2}\,m_{o_{D2}}(\omega)\,F\{\psi_H\}(\omega) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1+e^{-j\omega}}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{-j\omega}\right)j\,e^{-j\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{4}\,\sin\frac{\omega}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\,e^{-j\omega}\left(4\cos^2\frac{\omega}{2}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1 + \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\,e^{-j\omega}\right)j\,e^{-j\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{4}\,\sin\frac{\omega}{4} = \tag{275}$$

$$= j\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left(1 + \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\,e^{-j\omega}\right)\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{4}\,\sin\frac{\omega}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

S-a obţinut:

$$\left|F\{\psi_H\}(\omega)\right| = \left|\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{4}\right|\left|\sin\frac{\omega}{4}\right| \tag{276}$$

$$\left|F\{{}^{D}{}_{1}^{2}\psi_H\}(\omega)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(1+\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cos\omega\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\sin\omega\right)^2}\left|\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{4}\right|\left|\sin\frac{\omega}{4}\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{1+\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\right) + 2\,\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cos\omega}\left|\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{4}\right|\left|\sin\frac{\omega}{4}\right| \tag{277}$$

Pentru a compara localizările în frecvență ale funcțiilor $\psi_H(\tau)$ şi ${}^{D2}_{1}\psi_H(\tau)$ se reprezintă graficele modulelor spectrelor lor folosind acelaşi sistem de coordonate, în figura 6.7.1.2.7.

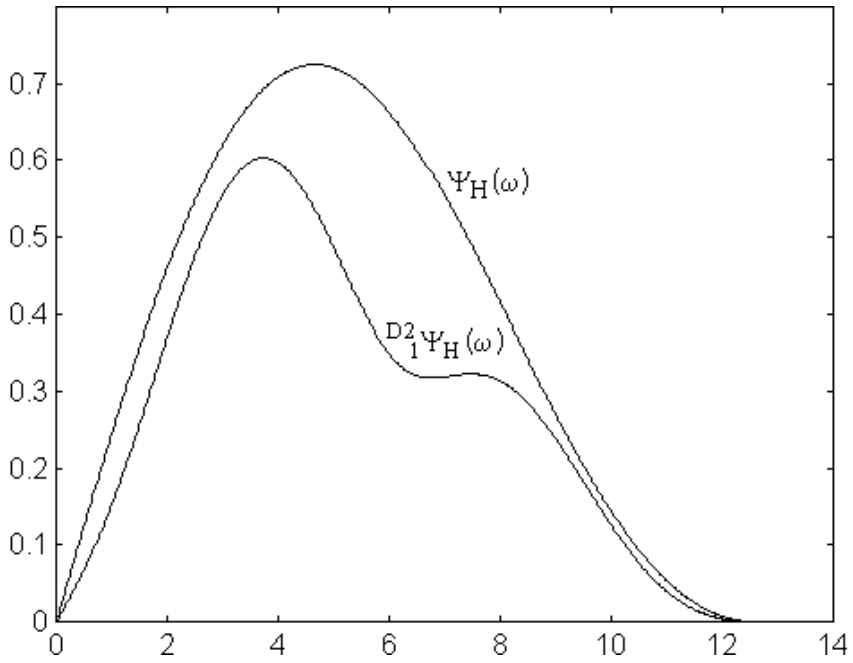


Figura 6.7.1.2.7 Localizarea în domeniul frecvență a funcției ${}^{D2}_{1}\psi_H(\tau)$ este superioară localizării funcției $\psi_H(\tau)$.

OBSERVAȚII

1. În cazul în care se doreşte o localizare în frecvență şi mai bună, atunci procedura de descompunere a elementelor descompunerii ortogonale se poate repeta. Spațiul W_o poate fi descompus în 2^M subspații fiecare dintre acestea având baza ortonormală $\left\{ {}_l\psi(\tau - 2^M n),\ l = \overline{1,\ 2^M} \right\}_{n \in Z}$.
2. Funcțiile ${}^{D2}_{1}\psi_H(\tau)$ şi ${}^{D2}_{2}\psi_H(\tau)$ sunt cazuri particulare de funcții de tipul "wavelet packets" introduse de Coifman şi Meyer. Acest tip de funcții va fi descris într-un paragraf ulterior.
3. În paragraful 7.1.2.4. a fost formulată condiția ca o funcție de tipul "wavelets mother" să aibă o regularitate impusă pe baza anulării momentelor de ordinul *m* ale acestei funcții, (233):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^m \psi(\tau)\, d\tau = 0, \quad m = \overline{1, r} \tag{278}$$

Uneori este important ca şi funcţia de scară φ care generează funcţia ψ din relaţia de mai sus să aibă câteva momente nule.

În acest scop este utilă condiţia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^m \varphi(\tau)\, d\tau = 0, \quad m = \overline{1, r} \tag{279}$$

după cum se poate vedea din exemplul următor.

Fie semnalul $x_o(\tau)$ din V_o. Descompunerea sa în baza Riesz a spaţiului V_o $\{\varphi(\tau - k)\}_{k \in Z}$ este :

$$x_o(\tau) = \sum_k \langle x_o(\tau), \varphi(\tau - k) \rangle\, \varphi(\tau - k) \tag{280}$$

Coeficienţii acestei descompuneri sunt:

$$\langle x_o(\tau), \varphi(\tau - k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_o(\tau)\, \varphi(\tau - k)\, d\tau \tag{281}$$

Funcţia $\varphi(\tau)$ s-a presupus reală.

Descompunerea în serie Taylor a semnalului $x_o(\tau)$ în jurul punctului k este:

$$x_o(\tau) = x_o(k) + \frac{\tau - k}{1!} x_o'(\tau)\Big|_{\tau = k} + \frac{(\tau - k)^2}{2!} x_o''(\tau)\Big|_{\tau = k} + \ldots + \frac{(\tau - k)^r}{r!} x_o^{(r)}(\tau)\Big|_{\tau = k} + \ldots$$

Având în vedere că funcţia $\varphi(\tau)$ se localizează în timp în jurul momentului 0, funcţia $\varphi(\tau - k)$ se va localiza în jurul momentului k , şi relaţia (281) devine:

$$\langle x_o(\tau), \varphi(\tau - k) \rangle = x_o(k) + x_o'(k) \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - k)\, \varphi(\tau - k)\, d\tau + \ldots + \frac{x_o^{(r)}(k)}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - k)^r\, \varphi(\tau - k)\, d\tau + \ldots$$

sau pe baza relației (281):

$$\left\langle x_o(\tau),\ \varphi(\tau - k)\right\rangle \ = \ x_o(k) \ + \ \frac{x_o^{(r)}(k)}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - k)^r \ \varphi(\tau - k)\, d\tau \ + \ \ldots \ \cong x_o(k)$$

În consecință coeficienții descompunerii semnalului $x_o(\tau)$ în baza lui V_o (relația (280)) pot fi aproximați cu ajutorul eşantioanelor semnalului considerat, $x_o(k)$.

Această proprietate este foarte importantă deoarece conduce la posibilitatea analizei semnalului $x_o(\tau)$ (care este un semnal în timp continuu) cu ajutorul calculatorului numeric.

Într-adevăr, relația (280) devine:

$$x_o(\tau) \ \cong \ \sum_k x_o(k)\, \varphi(\tau - k) \tag{282}$$

Este deci suficient să fie cunoscută varianta discretizată $x_o(k)$ a semnalului $x_o(\tau)$ pentru ca aceasta din urmă să poată fi reconstruit.

Mai mult, algoritmul lui Mallat poate fi inițializat cu semnalul în timp discret $x_o[k]$ şi transformarea "wavelet" discretă a acestuia poate fi utilizată pentru calculul transformării "wavelet" continuă a semnalului $x_o(\tau)$.

Iată cum poate fi utilizat un algoritm rapid (este vorba despre algoritmul lui Mallat), pentru calculul reprezentării timp-frecvență sau timp-factor de scară de tip "wavelet" a semnalului $x_o(\tau)$. Evident aproximarea din relația (282) este cu atât mai bună cu cât valoarea lui *r* este mai mare. Ar fi de dorit aşadar ca funcția de scară $\varphi(\tau)$ să aibă cât mai multe momente nule.

Principala limitare a metodei de calcul numeric a reprezentării bidimensionale de tip "wavelet" descrisă mai sus este că aceasta presupune ca semnalul $x_o(\tau)$ să fie derivabil şi să aibă cel puțin *r* derivate.

În continuare se studiază cum pot fi construite funcțiile φ şi ψ astfel încât să aibă suport compact şi să fie îndeplinite condițiile:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, d\tau \ = \ 1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tau^l \varphi(\tau)\, d\tau \ = \ 0, \quad l \ = \ 1, \mathrm{L} - 1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tau^l \psi(\tau)\, d\tau \ = \ 0, \quad l \ = \ 0, \mathrm{L} - 1 \end{cases} \tag{283}$$

Trebuie observat că prin creşterea numărului de momente nule ale funcției φ (relația 279), creşte şi simetria acestei funcții.

În onoarea profesorului Ronald Coifman, cel care a fost primul care a observat utilitatea acestui tip de funcții "wavelet" cu acelaşi număr de momente nule ca şi funcțiile de scară din care provin, aceste funcții "wavelet" au fost numite "coiflet" de ordinul L [43]. Condițiile din relația (283) se scriu în domeniul frecvență, în forma:

$$\begin{cases} F\{\varphi\}(0) = 1 \\ \dfrac{d^l}{d\omega^l}\left\{F\{\varphi\}\right\}(\omega) = 0, \quad l = \overline{1, L-1} \\ \dfrac{d^l}{d\omega^l}\left\{F\{\psi\}\right\}(\omega) = 0, \quad l = \overline{0, L-1} \end{cases} \tag{284}$$

Pe baza acestor condiții pot fi formulate condițiile corespunzătoare pentru răspunsurile în frecvență $m_o(\omega)$ şi $m_1(\omega)$.

Acestea sunt:

$$\begin{cases} m_o^{(l)}(\omega+\pi) = 0, \quad l = \overline{0, L-1} \\ m_o(0) = 1 \\ m_o^{(l)}(0) = 0, \quad l = \overline{0, L-1} \end{cases} \tag{285}$$

Se caută răspunsuri în frecvență de forma:

$$m_o(\omega) = \left(\frac{1+e^{j\omega}}{2}\right)^L Q(\omega) \tag{286}$$

Ultima relație este identică cu relația (223). De aceea vor fi satisfăcute condițiile (198). Datorită ultimelor condiții din relația (285), $m_o(\omega)$ trebuie să fie în acelaşi timp de forma:

$$m_o(\omega) = 1 + \left(1 - e^{j\omega}\right)^L S(\omega) \tag{287}$$

unde $S(\omega)$ este un polinom în $e^{j\omega}$. Modul în care se construieşte polinomul $Q(\omega)$ a fost deja prezentat în paragraful 7.1.2.4. Trebuie rezolvată ecuația:

$$\left(\frac{1 + e^{j\omega}}{2}\right) Q(\omega) = 1 + \left(1 - e^{j\omega}\right)^{L} S(\omega) \qquad (288)$$

în care necunoscuta este polinomul $S(\omega)$. Coeficienții acestui polinom pot fi obținuți pe baza relației (288) prin identificare. În acest mod se obține un sistem de ecuații. Acest sistem poate fi rezolvat direct pentru valori ale lui L inferioare lui 6. Pentru valori mai mari trebuie folosite metode numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații. Aceste sisteme de ecuații au fost rezolvate în [43] pentru L cu valori între 2 şi 10. Rezultatele sunt prezentate în tabelul 2.7.1.2.7 pentru L cuprins între 2 şi 6.

L	*n*	$m_o[n]$	L	n	$m_o[n]$
2	- 2	- 0,51429484095	4	-9	-0.00268241867100
	-1	0,238929728471		-8	0.00550312670900
	0	0,602859456942		-7	0.01658356047900
	1	0,272140543058		-6	-0.04650776447900
	2	- 0,051429972847		-5	-0.04322076356000
	3	- 0,011070271529		-4	0.28650333527400
3	-5	0.01158759673894		-3	0.56128525687000
	-4	-0.02932013797985		-2	0.30298357177300
	-3	-0.04763959030976		-1	-0.05077014075500
	-2	0.27302104653363		0	-0.05819625076200
	-1	0.57468239385412		1	0.02443409432100
	0	0.29486719369452		2	0.01122924096200
	1	-0.05408560709173		3	-0.00636960101100
	2	-0.04202648046079		4	-0.00182045891600
	3	0.01674441016291		5	0.00079020510100
	4	0.00396788361298		6	0.00032966517400
	5	-0.00128920335599		7	-0.00005019277500
	6	-0.00050950539899		8	-0.00002446573400
5	-11	0.00063096104600	6	-1	0.02919587949708
	-10	-0.00115222485200		0	0.02311077699769
	-9	-0.00519452402600		1	-0.01397368789860
	-8	0.01136245924400		2	-0.00648008999935
	-7	0.01886723537800		3	0.00478300139952
	-6	-0.05746423442900		4	0.00172065469983
	-5	-0.03965264851700		5	-0.00117582219988
	-4	0.29366739089500		6	-0.00045122699996
	-3	0.55312645256200		7	0.00021372979998
	-2	0.30715732619800		8	0.00009937759999

Tabelul 2.7.1.2.7 Coeficienții filtrelor generatoare ale funcțiilor de scară respectiv "wavelets mother" de tip Coiflet

	-1	-0.04711273886500		9	-0.00002923210000
	0	-0.06803812705100		10	-0.00001507200000
	1	0.02781364015300		11	0.00000264080000
	2	0.01773583743800		12	0.00000145930000
	3	-0.01075631851700		13	-0.00000011840000
	4	-0.00400101288600		14	-0.00000006730000
	5	0.00089559452900			
	6	-0.00041650057100			
	7	-0.00018382976900			
	8	0.00004408035400			
	9	0.00002208285700			
	10	-0.00000230494200			
	11	-0.00000126217500			
6	-15	-0.00014996379998			
	-14	0.00025356119998			
	-13	0.00154024569985			
	-12	-0.00294111079971			
	-11	-0.00716378189928			
	-10	0.01655206639835			
	-9	0.01991780429801			
	-8	-0.06499726279350			
	-7	-0.03680007359632			
	-6	0.29809232347019			
	-5	0.54750542934525			
	-4	0.30970684896903			
	-3	-0.04386605079561			
	-2	-0.07465223889254			

Tabelul 2.7.1.2.7 (continuare) Coeficienții filtrelor generatoare ale funcțiilor de scară respectiv “wavelets mother” de tip Coiflet.

Nici coeficienții lui $Q(\omega)$, descris în paragraful 7.1.2.4, nu pot fi determinați decât numeric pentru valori mai mari ale lui N. Câteva tehnici numerice utile în acest scop sunt prezentate în raportul de cercetare [139]. In figura următoare sunt prezentate funcțiile de scară respectiv funcțiile “wavelets mother” de tip “Coiflet” corespunzătoare valorilor lui L cuprinse între 2 şi 5.

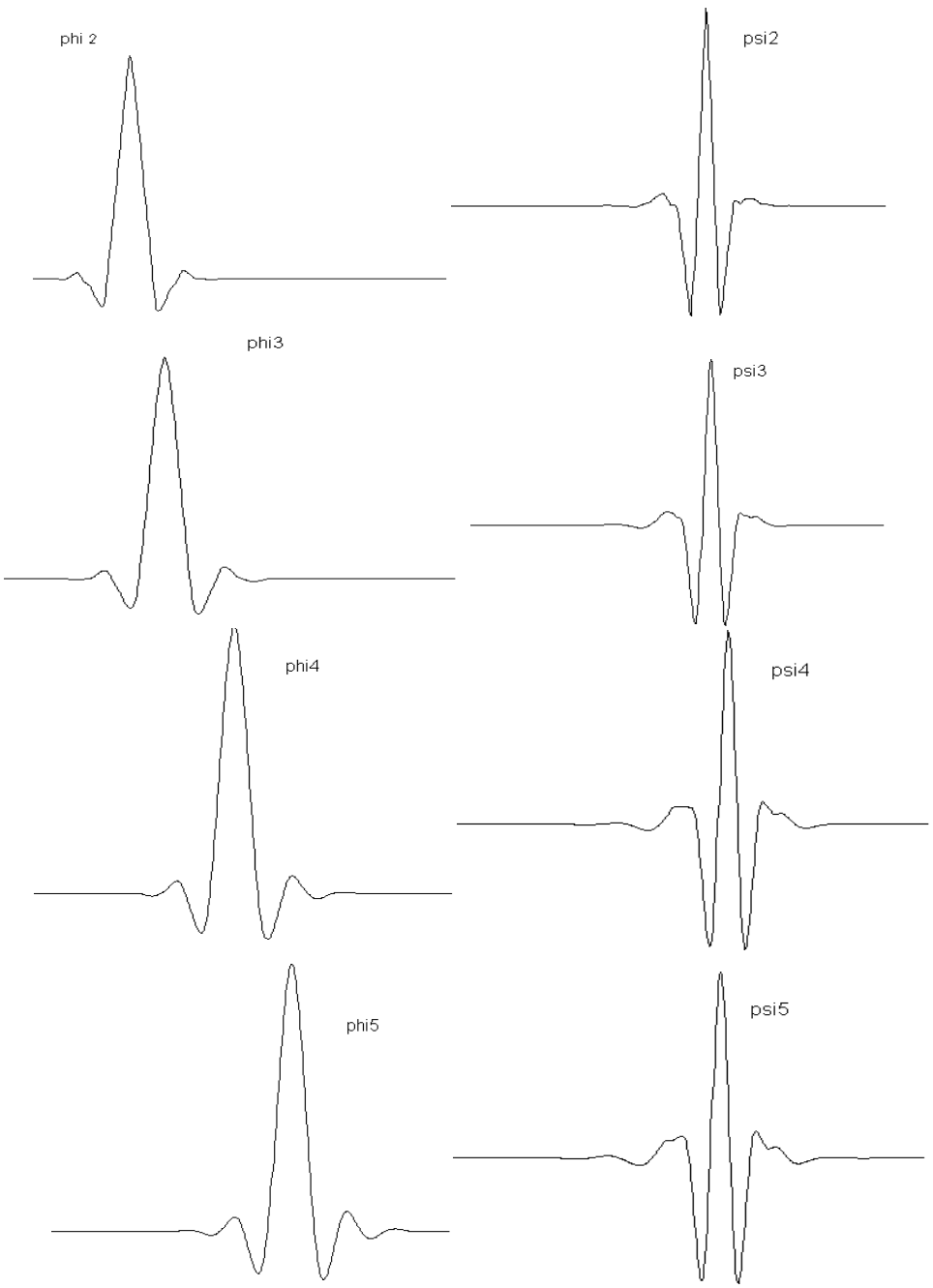


Figura 7.7.1.2.7 Cateva exemple de funcții de scară respectiv “wavelets mother “ de tip “Coiflet”.

7.1.2.8 BAZE BIORTOGONALE DE FUNCŢII "WAVELET"

Aceste baze sunt o generalizare a bazelor ortogonale prezentate în paragrafele anterioare. Construcţia lor este inspirată de legătura dintre mulţimile de tip cadru $\left\{\psi_{m,n}(\tau)\right\}_{m\in Z,\, n\in Z}$ şi $\left\{\tilde{\psi}_{m,n}(\tau)\right\}_{m\in Z,\, n\in Z}$ introduse în paragraful 7.1.2.

Utilitatea lor rezultă din proprietăţile suplimentare (faţă de cele ale bazelor ortonormale) date de structura generalizată.

Astfel:

- aceste mulţimi pot fi generate de funcţii simetrice,
- lungimea suporturilor funcţiilor de analiză, respectiv de sinteză poate fi diferită.

În paragraful 7.1.2.5 s-a evidenţiat legătura dintre bazele ortonormale de funcţii "wavelet" şi tehnica codării în subbenzi.

În figura 5.7.1.2.5 a fost prezentat un sistem de reconstrucţie perfectă, în urma codării în subbenzi, bazată pe funcţii wavelet. Se observă că în ambele secţiuni ale acestui sistem (de analiză şi de sinteză) se folosesc practic două tipuri de filtre, descrise de răspunsurile la impuls $m_0[n]$ şi $m_1[n]$. Întrebarea firească este dacă nu există sisteme cu răspuns finit la impuls (fie acestea: $m_0[n]$, $\tilde{m}_1[n]$, $\tilde{m}_0[n]$ şi $m_1[n]$) care să poată fi utilizate într-o schemă de analiză sinteză mai generală, cum este de exemplu cea din figura 1.7.1.2.8

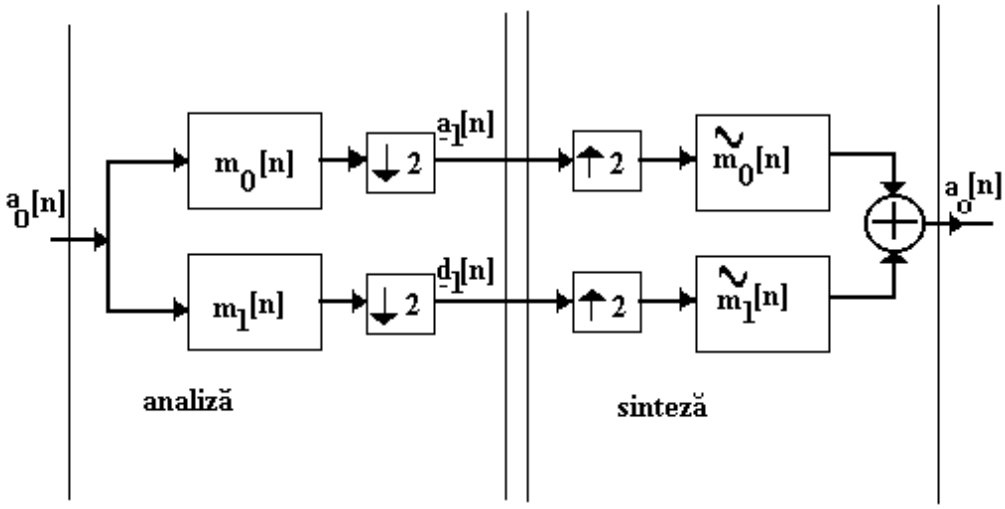


Figura 1.7.1.2.8 O schemă de analiză-sinteză cu funcţii "wavelet" generalizată.

Într-un paragraf anterior s-a vorbit despre cadrul dual unui cadru dat. La fel se poate vorbi şi despre baza Riesz dual unei baze Riesz date. Baza Riesz $\left\{ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - n) \right\}_{\mathrm{n} \in Z}$ se zice că este dual bazei Riesz $\left\{ \varphi(\tau - n) \right\}_{\mathrm{n} \in Z}$, dacă:

$$\left\langle \varphi(\tau - l),\ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - k) \right\rangle = \delta[l,\ k], \quad (\forall)\ (l,\ k) \in Z \times Z$$

Fie:

$$F\left\{ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau) \right\}(\omega) = \frac{F\left\{ \varphi(\tau) \right\}(\omega)}{\left| m(\omega) \right|^2} \tag{289}$$

Propoziție Mulțimea $\left\{ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - k) \right\}_{\mathrm{k} \in Z}$ este baza Riesz dual a bazei Riesz $\left\{ \varphi(\tau - \mathrm{l}) \right\}_{\mathrm{l} \in Z}$, în V_o.

Demonstrație Se verifică prima condiție.

$$\left\langle \varphi(\tau - l),\ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - k) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle F\left\{ \varphi(\tau - l) \right\}(\omega),\ F\left\{ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - k) \right\}(\omega) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\langle e^{-\mathrm{j}\,\omega \mathrm{l}}\, F\left\{ \varphi \right\}(\omega), e^{-\mathrm{j}\,\omega\, \mathrm{l}}\, F\left\{ {}_{\mathrm{d}}\varphi \right\}(\omega) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F\left\{ \varphi \right\}(\omega) F^*\left\{ {}_{\mathrm{d}}\varphi \right\}(\omega)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega(\mathrm{l}-\mathrm{k})} d\omega$$

sau ținând seama de relația (289):

$$\left\langle \varphi(\tau - l),\ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - k) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F\left\{ \varphi \right\}(\omega)\, \frac{F^*\left\{ \varphi \right\}(\omega)}{\left| m(\omega) \right|^2}\, e^{-\mathrm{j}\,\omega\,(\mathrm{l}-\mathrm{k})} d\omega$$

Descompunând integrala într-o sumă de integrale, care se calculează pe intervale disjuncte de lungime 2π, se obține:

$$\left\langle \varphi(\tau - l),\ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - k) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathrm{n} = -\infty}^{\infty} \int_{(2\mathrm{n}-1)\pi}^{(2\mathrm{n}+1)\pi} \frac{\left| F\left\{ \varphi \right\} \right|^2}{\left| m(\omega) \right|^2}\, e^{-\mathrm{j}\,\omega\,(\mathrm{l}-\mathrm{k})} d\omega$$

sau, cu schimbarea de variabilă:

$$u = \omega - 2n\pi$$

$$\left\langle \varphi(\tau - l),\ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - k) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \frac{\left| F\{\varphi\}(u + 2n\pi) \right|^2}{\left| m(u + 2n\pi) \right|^2}\ e^{-\mathrm{j}\,(\mathrm{u}+2\mathrm{n}\pi)\,(\mathrm{l}-\mathrm{k})} du$$

Ţinând seama de periodicitatea cu perioadă 2π a funcţiei $|m(u)|^2$ şi a exponenţialei complexe, ultima relaţie devine:

$$\left\langle \varphi(\tau - l),\ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - k) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \left| F\{\varphi\}(u + 2n\pi) \right|^2}{\left| m(u) \right|^2}\ e^{-\mathrm{j}\,\mathrm{u}\,(\mathrm{l}-\mathrm{k})} du$$

În sfârşit, ţinând seama de definiţia funcţiei $|m(u)|^2$, ultima relaţie devine:

$$\left\langle \varphi(\tau - l),\ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - k) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{j}\,\mathrm{u}\,(\mathrm{l}-\mathrm{k})} du$$

Deoarece membrul drept al ultimei relaţii reprezintă o transformare Fourier în timp discret inversă, se obţine în final:

$$\left\langle \varphi(\tau - l),\ {}_{\mathrm{d}}\varphi(\tau - k) \right\rangle = \delta[k - l]$$

În consecinţă propoziţia este demonstrată.

În continuare se determină condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească cele patru răspunsuri la impuls pentru ca sistemul din figură să fie unul de identitate. Ieşirile sistemului de analiză pot fi exprimate în forma:

$$\begin{cases} a_{-1}[n] = \left(a_{\mathrm{o}}[n] * m_{\mathrm{o}}[n] \right)_{\mathrm{n} \to 2\mathrm{n}} = \sum_{l} a_{\mathrm{o}}[l]\ m_{\mathrm{o}}[2n - l] \\ d_{-1}[n] = \left(a_{\mathrm{o}}[n] * m_{1}[n] \right)_{\mathrm{n} \to 2\mathrm{n}} = \sum_{l} a_{\mathrm{o}}[l]\ m_{1}[2n - l] \end{cases} \tag{290}$$

De aceea ieşirea sistemului de sinteză trebuie să aibă expresia:

$$a_0[n] = {}_1a_{-1}[n] * \tilde{m}_0[n] + {}_1d_{-1}[n] * \tilde{m}_1[n] =$$

$$= \sum_k {}_1a_{-1}[k]\, \tilde{m}_0[n-k] + {}_1d_{-1}[k]\, \tilde{m}_1[n-k] = \qquad (291)$$

$$= \sum_p a_{-1}[p]\, \tilde{m}_0[n-2p] + d_{-1}[p]\, \tilde{m}_1[n-2p]$$

sau ținând seama de relația (290), ultima relație se mai poate scrie:

$$a_0[n] = \sum_p \tilde{m}_0[n-2p] \sum_l a_0[l]\, m_0[2p-l] + \tilde{m}_1[n-2p] \sum_l a_0[l]\, m_1[2p-l]$$

sau:

$$a_0[n] = \sum_l a_0[l] \left(\sum_p \tilde{m}_0[n-2p]\, m_0[2p-l] + \tilde{m}_1[n-2p]\, m_1[2p-l] \right)$$

Folosind notația:

$$m[n-l] = \sum_p \tilde{m}_0[n-2p]\, m_0[2p-l] + \tilde{m}_1[n-2p]\, m_1[2p-l]$$

ultima relație devine:

$$a_0[n] = a_0[n] * m[n]$$

E deci necesar ca:

$$m[n] = \delta[n]$$

adică:

$$\sum_p \tilde{m}_0[n-2p]\, m_0[2p-l] + \tilde{m}_1[n-2p]\, m_1[2p-l] = \delta[n-l] \qquad (291')$$

sau:

$$\sum_p \tilde{m}_0^{\vee}[2p-n]\, m_0[2p-l] + \tilde{m}_1^{\vee}[2p-n]\, m_1[2p-l] = \delta[n-l] \qquad (292)$$

În continuare se stabilesc condiţiile corespunzătoare în domeniul transformării *z*. Pentru început se calculează:

$$A_{-1}(z^2) = \sum_n a_{-1}[n]\, z^{-2n} = \sum_n \left(a_o[n] * m_o[n]\right)_{n\to 2n} z^{-2n}$$

Fie:

$$a_o[n] * m_o[n]\Big|_{n\to 2n} = a[2n]$$

Ultima relaţie devine:

$$A_{-1}(z^2) = \sum_n a[2n]\, z^{-2n} = \sum_n \frac{a[n] + (-1)^n a[n]}{2} z^{-n} = \frac{1}{2}\left(A(z) + A(-z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(A_o(z)M_o(z) + A_o(-z)M_o(-z)\right)$$

La fel se poate calcula şi $D_{-1}(z^2)$. Condiţia (289) este deci echivalentă cu:

$$\begin{cases} A_{-1}(z^2) = \dfrac{1}{2}\left(A_o(z)M_o(z) + A_o(-z)M_o(-z)\right) \\ D_{-1}(z^2) = \dfrac{1}{2}\left(A_o(z)M_1(z) + A_o(-z)M_1(-z)\right) \end{cases} \tag{293}$$

Luând în cei doi membri ai relaţiei (290) transformata *z* se obţine:

$$A_o(z) = \sum_n \left(\sum_p a_{-1}[p]\, \tilde{m}_o[n-2p] + d_{-1}[p]\, \tilde{m}_1[n-2p] \right) z^{-n} =$$

$$= \sum_p a_{-1}[p] \sum_n \tilde{m}_o[n-2p]\, z^{-n} + d_{-1}[p] \sum_n \tilde{m}_1[n-2p]\, z^{-n} =$$

$$= \sum_p a_{-1}[p]\, z^{-2p} \tilde{M}_o(z) + d_{-1}[p]\, z^{-2p} \tilde{M}_1(z) = A_{-1}(z^2)\tilde{M}_o(z) + D_{-1}(z^2)\tilde{M}_1(z)$$

Deci condiţia (290) este echivalentă cu:

$$A_0(z) = A_{-1}(z^2)\tilde{M}_0(z) + D_{-1}(z^2)\tilde{M}_1(z) \tag{294}$$

Luând în relația (292) transformate *z* se obține:

$$\sum_p z^{-2p}\tilde{M}_0(z)m_0[2p-l] + z^{-2p}\tilde{M}_1(z)m_1[2p-l] = z^{-l}$$

sau:

$$\tilde{M}_0(z)\sum_p m_0[2p-l]z^{-2p} + \tilde{M}_1(z)\sum_p m_1[2p-l]z^{-2p} = z^{-l}$$

adică:

$$\tilde{M}_0(z)\sum_p m_0[2p-l]z^{-(2p-l)} + \tilde{M}_1(z)\sum_p m_1[2p-l]z^{-(2p-l)} = 1$$

sau:

$$\tilde{M}_0(z)M_0(z^2) + \tilde{M}_1(z)M_1(z^2) = 1 \tag{295}$$

respectiv:

$$\frac{1}{2}\left[\tilde{M}_0(z)\left(M_0(z)+M_0(-z)\right) + \tilde{M}_1(z)\left(M_1(z)+M_1(-z)\right)\right] = 1 \tag{296}$$

ultima relație este satisfăcută şi dacă se respectă condițiile:

$$\begin{cases} M_0(z)\tilde{M}_0(z) + M_1(z)\tilde{M}_1(z) = 2 \\ M_0(-z)\tilde{M}_0(z) + M_1(-z)\tilde{M}_1(z) = 0 \end{cases} \tag{297}$$

Particularizând transformata *z* la transformata Fourier în timp discret relația (297) devine:

$$\begin{cases} m_0(\omega)\tilde{m}_0(\omega) + m_1(\omega)\tilde{m}_1(\omega) = 2 \\ m_0(\omega+\pi)\tilde{m}_0(\omega) + m_1(\omega+\pi)\tilde{m}_1(\omega) = 0 \end{cases} \tag{298}$$

Acest sistem poate fi rezolvat considerând că se cunosc funcțiile $m_0(\omega)$ şi $m_1(\omega)$.

Înmulțind prima ecuație cu $-m_0(\omega+\pi)$ şi cea de a doua ecuație cu $m_0(\omega)$ se obține:

$$\begin{cases} -m_0(\omega+\pi)m_0(\omega)\tilde{m}_0(\omega) - m_0(\omega+\pi)m_1(\omega)\tilde{m}_1(\omega) = -2m_0(\omega+\pi) \\ m_0(\omega+\pi)m_0(\omega)\tilde{m}_0(\omega) + m_0(\omega)m_1(\omega+\pi)\tilde{m}_1(\omega) = 0 \end{cases}$$

Adunând cele două ecuaţii rezultă:

$$\tilde{m}_1(\omega)\left(m_0(\omega)m_1(\omega+\pi) - m_0(\omega+\pi)m_1(\omega)\right) = -2m_0(\omega+\pi)$$

sau:

$$\tilde{m}_1(\omega) = -\frac{2\,m_0(\omega+\pi)}{m_0(\omega)m_1(\omega+\pi) - m_0(\omega+\pi)m_1(\omega)}$$

Înmulţind prima ecuaţie cu $-m_1(\omega+\pi)$ şi cea de a doua cu $m_1(\omega)$ se obţine:

$$\begin{cases} -m_1(\omega+\pi)m_0(\omega)\tilde{m}_0(\omega) - m_1(\omega+\pi)m_1(\omega)\tilde{m}_1(\omega) = -2m_1(\omega+\pi) \\ m_0(\omega+\pi)m_1(\omega)\tilde{m}_0(\omega) + m_1(\omega+\pi)m_1(\omega)\tilde{m}_1(\omega) = 0 \end{cases}$$

Adunând cele două ecuaţii rezultă:

$$\tilde{m}_0(\omega) = \frac{-2\,m_1(\omega+\pi)}{m_0(\omega+\pi)m_1(\omega) - m_1(\omega+\pi)m_0(\omega)}$$

Dacă se consideră că:

$$m_1(\omega) = e^{-j\omega}\,m_0^*(\omega+\pi)$$

atunci:

$$m_0(\omega+\pi)m_1(\omega) - m_1(\omega+\pi)m_0(\omega) =$$

$$= e^{-j\omega}\left|m_0(\omega+\pi)\right|^2 - e^{-j(\omega+\pi)}\,m_0^*(\omega)m_0(\omega) =$$

$$= e^{-j\omega}\left(\left|m_0(\omega+\pi)\right|^2 + \left|m_0(\omega)\right|^2\right)$$

Soluţiile sistemului devin în acest caz:

$$\tilde{m}_1(\omega) = \frac{2 e^{j\omega} m_0(\omega+\pi)}{|m_1(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2}$$

$$\tilde{m}_0(\omega) = \frac{-2 e^{j\omega} m_1(\omega+\pi)}{|m_0(\omega)|^2 + |m_1(\omega+\pi)|^2}$$

Dacă se face şi ipoteza suplimentară:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_1(\omega+\pi)|^2 = 1$$

atunci soluțiile sistemului devin:

$$\tilde{m}_1(\omega) = 2 e^{j\omega} m_0(\omega+\pi) = 2 m_1^*(\omega)$$

$$\tilde{m}_0(\omega) = -2 e^{j\omega} m_1(\omega+\pi) = -2 e^{j\omega}(-1) e^{-j\omega} m_0^*(\omega) = 2 m_0^*(\omega)$$

În acest caz sistemul din figura 1.7.1.2.8 se reduce la cel din figura 5.7.1.2.5.

Pentru obținerea funcțiilor "wavelets mother" cu suport compact sunt interesante sistemele (cu răspuns în frecvență $m_0(\omega)$, $m_1(\omega)$, $\tilde{m}_0(\omega)$ şi $\tilde{m}_1(\omega)$)cu răspuns finit la impuls. De aceea în continuare funcțiile $m_0(\omega)$, $m_1(\omega)$, $\tilde{m}_0(\omega)$ şi $\tilde{m}_1(\omega)$vor fi considerate polinoame în variabila $e^{j\omega}$.

În relațiile (297) şi (298) au fost obținute sistemele de două ecuații cu patru necunoscute. Pentru rezolvarea acestora trebuie impuse încă două condiții. În continuare se fac câteva observații asupra sistemelor de ecuații obținute. Pe baza primei ecuații din sistemul descris de (297) se constată că polinoamele $M_0(z)$ şi $M_1(z)$ nu pot avea rădăcini comune. Pe baza celei de a doua ecuații se constată că perechile $M_0(-z)$ şi $\tilde{M}_1(z)$ respectiv $M_1(-z)$ şi $\tilde{M}_0(z)$ trebuie să aibă rădăcini comune. De aceea polinoamele $\tilde{M}_0(z)$ şi $\tilde{M}_1(z)$ ar putea avea forma:

$$\begin{cases} \tilde{M}_0(z) = M_1(-z) R(z) \\ \tilde{M}_1(z) = M_0(-z) R(z) \end{cases} \qquad (299)$$

Cu această alegere prima ecuație din relația (297) devine:

$$M_o(z)M_1(-z)R(z) + M_1(z)M_o(-z)R(z) = 2 \tag{300}$$

sau:

$$M_o(z)M_1(-z) + M_1(z)M_o(-z) = 2R^{-1}(z) \tag{301}$$

Dar membrul stâng (fiind un polinom în z) nu poate avea poli diferiţi de 0. De aceea polinomul $R(z)$ nu poate fi decât de forma:

$$R(z) = \alpha z^k$$

Deci relaţia (301) devine:

$$M_o(z)M_1(-z) + M_1(z)M_o(-z) = 2\alpha^{-1}z^{-k} \tag{302}$$

iar relaţia (299) devine:

$$\begin{cases} \tilde{M}_o(z) = \alpha z^k M_1(-z) \\ \tilde{M}_1(z) = \alpha z^k M_o(-z) \end{cases} \tag{303}$$

Sistemul descris de relaţia (297) este deci echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} M_o(z)M_1(-z) + M_1(z)M_o(-z) = 2\alpha^{-1}z^{-k} \\ \tilde{M}_o(z) = \alpha z^k M_1(-z) \\ \tilde{M}_1(z) = \alpha z^k M_o(-z) \end{cases} \tag{304}$$

Se constată că încă este necesară o condiţie suplimentară.

Mai pot fi făcute câteva observaţii utile. Pentru $k = 0$ şi $\alpha = -1$, relaţia (303) devine:

$$\begin{cases} \tilde{M}_o(z) = -M_1(-z) \\ \tilde{M}_1(z) = -M_o(-z) \end{cases} \tag{305}$$

Se stabileşte semnificaţia ultimei relaţii în domeniul timp.

Prima ecuație se mai poate scrie:

$$\sum_n m_o[n]\, z^n = -\sum_n m_1[n]\,(-1)\, z^{-n}$$

De aceea rezultă:

$$\begin{cases} \tilde{m}_o[n] = (-1)^{n+1}\, m_1[n] \\ \tilde{m}_1[n] = (-1)^{n+1}\, m_o[n] \end{cases} \tag{306}$$

În acest caz prima ecuație din relația (304) devine:

$$M_o(z)M_1(-z) + M_1(z)M_o(-z) = -2 \tag{307}$$

adică:

$$m_o[n] * (-1)^n m_1[n] + m_1[n] * (-1)^n m_o[n] = -2\,\delta[n] \tag{308}$$

Dar:

$$m_o[n] * (-1)^n m_1[n] = \sum_k m_o[k]\,(-1)^{n-k} m_1[n-k]$$

sau cu schimbarea de variabilă:

$$n - k = p$$

$$m_o[n] * (-1)^n m_1[n] = \sum_p m_o[n-p]\,(-1)^p m_1[p]$$

iar:

$$m_1[n] * (-1)^n m_o[n] = \sum_p m_1[p]\,(-1)^{n-p} m_o[n-p]$$

Relația (308) devine:

$$\sum_p \left[(-1)^p + (-1)^{n-p}\right] m_o[n-p]\, m_1[p] = -2\,\delta[n] \tag{309}$$

Dar conform relației (306):

$$m_1[p] = (-1)^{p+1}\tilde{m}_0[p]$$

De aceea relaţia (309) devine:

$$\sum_p[(-1)^{2p+1} + (-1)^{n-1}]\, m_0[n-p]\,\tilde{m}_0[p] = -2\,\delta[n] \tag{310}$$

După schimbarea de variabilă:

$$n = 2q$$

ultima relaţie ia forma:

$$\sum_p m_0[2q-p]\,\tilde{m}_0[p] = \delta[q]$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$n = p-2q$$

obţinem :

$$\sum_n m_0[-n]\,\tilde{m}_0[n+2q] = \delta[q] \tag{311}$$

Fiind vorba de filtru cu răspuns finit la impuls se poate scrie:

$$\begin{cases} M_0(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} m_0[n]\, z^{-n} = z^{-N_2}p(z) \\ \tilde{M}_0(z) = \sum_{n=\tilde{N}_1}^{\tilde{N}_2} \tilde{m}_0[n]\, z^{-n} = z^{-\tilde{N}_2}q(z) \end{cases} \tag{312}$$

unde *p(z)* şi *q(z)* sunt două polinoame.

Relaţia (307) devine:

$$z^{-N_2}p(z)M_1(-z) + M_1(z)(-1)^{-N_2}z^{-N_2}p(-z) = -2 \tag{313}$$

Dar folosind relaţia (305) se poate scrie:

$$M_1(-z) = -\tilde{M}_o(z) = -z^{-\tilde{N}_2} q(z)$$

$$M_1(z) = -\tilde{M}_o(-z) = -(-1)^{-\tilde{N}_2} z^{-\tilde{N}_2} q(-z)$$

În consecință relația (313) devine:

$$-z^{-N_2} p(z)\, z^{-\tilde{N}_2} q(z) - (-1)^{-\tilde{N}_2} (-1)^{-N_2} z^{-\tilde{N}_2} q(-z)\, z^{-N_2} p(-z) = -2$$

adică:

$$z^{-(N_2+\tilde{N}_2)} p(z) q(z) + (-1)^{-(N_2+\tilde{N}_2)} z^{-(N_2+\tilde{N}_2)} q(-z) p(-z) = 2$$

sau:

$$z^{-(N_2+\tilde{N}_2)} \left(p(z) q(z) + (-1)^{-(N_2+\tilde{N}_2)} q(-z) p(-z) \right) = 2 \qquad (314)$$

Dacă se presupune că este o funcție simetrică, cu axa de simetrie identică cu ordonata sistemului de axe în care se reprezintă graficul funcției atunci:

$$-N_2 = N_1$$

În acest caz relația (414) devine:

$$z^{N_1-\tilde{N}_2} \left(p(z)\, q(z) + (-1)^{N_2-\tilde{N}_2} p(-z)\, q(-z) \right) = 2 \qquad (315)$$

Având în vedere că $p(z), q(z), p(-z)$ și $q(-z)$ sunt polinoame în z rezultă că este necesar ca:

$$N_1 - \tilde{N}_2 < 0 \qquad (316)$$

O demonstrație asemănătoare conduce la concluzia că:

$$\tilde{N}_1 - N_2 < 0 \qquad (317)$$

Se poate demonstra că diferențele $\tilde{N}_2 - N_1$ și $N_2 - \tilde{N}_1$ trebuie să fie numere impare, [31].

În consecință, există filtre cu răspuns finit la impuls funcție reală, simetrice care pot fi folosite în schema din figura 1.7.1.2.8. Pentru construcția lor pot fi utilizate relațiile deduse în introducerea în acest capitol.

În continuare se stabileşte legătura dintre teoria codării în subbenzi şi teoria bazelor biortogonale de funcţii "wavelet". Această teorie se bazează tot pe noţiunea de analiză multirezoluţie. Această legătură a fost evidenţiată pentru prima dată în [58].

Se consideră două analize multirezoluţie ale spaţiului $L^2(R)$. $\left\{V_j\right\}_{j \in Z}$ şi $\left\{\widetilde{W}_m\right\}_{m \in Z}$, generate de funcţiile de scară φ şi $\widetilde{\varphi}$. Fie spaţiile W_m şi $\widetilde{W}_m$ constituite ca şi complemente (neortogonale) ale spaţiilor V_m şi $\widetilde{V}_m$:

$$\begin{cases} V_m = V_{m-1} \oplus W_{m-1} \\ \widetilde{V}_m = \widetilde{V}_{m-1} \oplus \widetilde{W}_{m-1} \end{cases} \tag{318}$$

Cele două analize multirezoluţie se numesc duale dacă sunt îndeplinite condiţiile:

$$\widetilde{V}_m \perp W_m \text{ şi } \widetilde{W}_m \perp V_m \tag{319}$$

O consecinţă imediată a relaţiei (319) este:

$$\widetilde{W}_m \perp W_{m'} \text{ pentru } m \neq m' \tag{320}$$

Într-adevăr pentru $m' < m$

$$W_{m'} \subset V_m \perp \widetilde{W}_m$$

Deci:

$$W_{m'} \perp \widetilde{W}_m$$

Pentru $m' > m$

$$\widetilde{W}_m \subset \widetilde{V}_m \perp W_{m'}$$

Deci:

$$\widetilde{W}_m \perp W_{m'}$$

În continuare se lucrează în ipoteza că se respectă condiţia de dualitate.

Condiţia (318) se mai exprimă şi în forma:

$$\left\langle \widetilde{\varphi}_{m,k}, \psi_{m,l} \right\rangle = 0 \text{ şi } \left\langle \widetilde{\psi}_{m,k}, \varphi_{m,l} \right\rangle = 0 \tag{321}$$

unde:

$$\varphi_{m,k}(\tau) = 2^{\frac{m}{2}}\,\varphi\left(2^m\tau - k\right), \qquad \psi_{m,k}(\tau) = 2^{\frac{m}{2}}\,\psi\left(2^m\tau - k\right)$$

$$\tilde{\varphi}_{m,k}(\tau) = 2^{\frac{m}{2}}\,\tilde{\varphi}\left(2^m\tau - k\right), \qquad \tilde{\psi}_{m,k}(\tau) = 2^{\frac{m}{2}}\,\tilde{\psi}\left(2^m\tau - k\right)$$

Cu ~ s-au marcat funcțiile duale.

Mai mult, funcțiile duale trebuie să satisfacă şi condițiile:

$$\langle \tilde{\varphi}(\tau), \varphi(\tau - l)\rangle = \delta[l] \text{ şi } \langle \tilde{\psi}(\tau), \psi(\tau - l)\rangle = \delta[l] \tag{322}$$

Se poate demonstra prin calcul că ultima relație este echivalentă cu:

$$\left\langle \tilde{\varphi}_{m,l}(\tau), \varphi_{m,l'}(\tau)\right\rangle = \delta[l - l']; \quad l, l', m \in Z \tag{323}$$

Condiția (322) şi relația (320) conduc la condiția:

$$\left\langle \tilde{\psi}_{m,l}(\tau), \psi_{m',l'}(\tau)\right\rangle = \delta[m - m']\,\delta[l - l']; \quad l, l', m, m' \in Z \tag{324}$$

Condițiile de biortogonalitate de mai sus se exprimă în domeniul frecvență în forma:

$$\begin{aligned}
&\sum_k F\{\tilde{\varphi}\}(\omega + 2k\pi)\; F^*\{\varphi\}(\omega + 2k\pi) = 1\\
&\sum_k F\{\tilde{\psi}\}(\omega + 2k\pi)\; F^*\{\psi\}(\omega + 2k\pi) = 1\\
&\sum_k F\{\tilde{\psi}\}(\omega + 2k\pi)\; F^*\{\varphi\}(\omega + 2k\pi) = 0\\
&\sum_k F\{\tilde{\varphi}\}(\omega + 2k\pi)\; F^*\{\psi\}(\omega + 2k\pi) = 0
\end{aligned} \qquad (\forall)\ \omega \in R \tag{325}$$

Deoarece funcția $\tilde{\varphi}(\tau)$ definește o analiză multirezoluție, ea trebuie să satisfacă o condiție de forma:

$$\tilde{\varphi}(\tau) = 2\sum_k \tilde{m}_0[k]\,\tilde{\varphi}(2\tau - k) \tag{326}$$

Având în vedere condiţiile impuse spaţiilor $\tilde{V}_m$, funcţia $\tilde{\psi}$ trebuie să satisfacă o condiţie de aceeaşi formă:

$$\tilde{\psi}(\tau) = 2\sum_k \tilde{m}_1[k]\,\tilde{\psi}(2\tau - k) \tag{327}$$

Considerând că analiza multirezoluţie V_m este generată de filtrul cu răspunsul la impuls $m_o[n]$ şi că spaţiile W_m sunt generate de filtrul cu răspunsul la impuls $m_1[n]$, condiţiile (325) se exprimă în forma echivalentă:

$$\begin{aligned}
&\tilde{m}_o(\omega)m_o^*(\omega) + m_o(\omega+\pi)m_o^*(\omega+\pi) = 1\\
&\tilde{m}_1(\omega)m_1^*(\omega) + \tilde{m}_1(\omega+\pi)m_1^*(\omega+\pi) = 1\\
&\tilde{m}_1(\omega)m_o^*(\omega) + \tilde{m}_1(\omega+\pi)m_o^*(\omega+\pi) = 0\\
&\tilde{m}_o(\omega)m_1^*(\omega) + m_o(\omega+\pi)m_1^*(\omega+\pi) = 0
\end{aligned} \qquad (\forall)\ \omega \in R \tag{328}$$

Sistemul de ecuaţii de mai sus poate fi exprimat în forma matricială:

$$\begin{bmatrix} \tilde{m}_o(\omega) & \tilde{m}_o(\omega+\pi) \\ \tilde{m}_1(\omega) & \tilde{m}_1(\omega+\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_o^*(\omega) & m_1^*(\omega) \\ m_o^*(\omega+\pi) & m_1^*(\omega+\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{329}$$

Folosind notaţiile:

$$\tilde{M}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{m}_o(\omega) & \tilde{m}_o(\omega+\pi) \\ \tilde{m}_1(\omega) & \tilde{m}_1(\omega+\pi) \end{bmatrix};\ M(\omega) = \begin{bmatrix} m_o(\omega) & m_o(\omega+\pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega+\pi) \end{bmatrix} \tag{330}$$

relaţia (329) devine:

$$\tilde{M}(\omega)\cdot M^{T^*}(\omega) = U \tag{331}$$

unde U este matricea unitate de ordinul 2. Ultima relaţie se poate scrie şi în forma:

$$M^{T^*}(\omega)\cdot\tilde{M}(\omega) = U$$

Aceasta conduce la sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} m_o^*(\omega)\tilde{m}_o(\omega) + m_1^*(\omega)\tilde{m}_1(\omega) = 1 \\ m_o^*(\omega)\tilde{m}_o(\omega+\pi) + m_1^*(\omega)\tilde{m}_1(\omega+\pi) = 0 \end{cases} \tag{332}$$

Sistemul (332) este similar cu sistemul (197). Această similitudine face legătura dintre teoria codării subbandă şi teoria bazelor biortogonale de funcţii wavelet.

Trebuie remarcat că în cazul bazelor ortonormale matricea $M(\omega)$ este unitară.

Rezolvând sistemul din relația (332), pe baza regulii lui Cramer, se obține:

$$\begin{cases} \tilde{m}_0(\omega) = \dfrac{m_1^*(\omega+\pi)}{\Delta^*(\omega)} \\ \tilde{m}_1(\omega) = -\dfrac{m_0^*(\omega+\pi)}{\Delta^*(\omega)} \end{cases} \tag{333}$$

unde cu $\Delta(\omega)$ s-a notat determinantul matricii $M(\omega)$.

Relația (333) arată cum se generează spațiile $\tilde{V}_m$ și $\tilde{W}_m$ pornind de la spațiile V_m și W_m. Proiecțiile semnalului $x(\tau)$, de energie finită, pe spațiile V_m și W_m se calculează cu relațiile [76]:

$$\begin{cases} x_m(\tau) = \sum_l \left\langle x(\tau), \tilde{\varphi}_{m,l}(\tau) \right\rangle \varphi_{m,l}(\tau) \\ d_m(\tau) = \sum_l \left\langle x(\tau), \tilde{\psi}_{m,l}(\tau) \right\rangle \psi_{m,l}(\tau) \end{cases} \tag{334}$$

Mai mult, în [31] este demonstrată următoarea propoziție:

Teorema 1.7.1.2.8. Dacă sunt îndeplinite condițiile:

Există constantele pozitive ε și C astfel încât:

$$\begin{aligned} \left|F\{\varphi\}(\omega)\right| &\le C(1+|\omega|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \\ \left|F\{\tilde{\varphi}\}(\omega)\right| &\le C(1+|\omega|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \end{aligned} \tag{335}$$

atunci orice funcție x din $L^2(R)$ poate fi descompusă în forma:

$$x(\tau) = \sum_{m,k} \left\langle x, \tilde{\psi}_{m,k} \right\rangle \psi_{m,k}(\tau) = \sum_{m,k} \left\langle x, \psi_{m,k} \right\rangle \tilde{\psi}_{m,k}(\tau) \tag{336}$$

În aceeași lucrare se demonstrează și

Teorema 2.7.1.2.8 Dacă:

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= 2\sum_{n} (-1)^n \, \tilde{m}_0[1-n] \, \varphi(2\tau + n) \\ \tilde{\psi}(\tau) &= 2\sum_{n} (-1)^n \, m_0[1-n] \, \tilde{\varphi}(2\tau + n) \end{aligned} \tag{337}$$

atunci mulţimea $\left\{\psi_{m,\,k}(\tau)\right\}_{m,\,k\,\in Z}$ reprezintă un cadru în $L^2(R)$. Cadrul dual este mulţimea $\left\{\tilde{\psi}_{m,\,k}\right\}_{m\,\in Z,\,k\,\in Z}$. Mai mult, mulţimile $\left\{\psi_{m,\,k}\right\}_{k\,\in Z}$ şi $\left\{\tilde{\psi}_{m,\,k}\right\}_{k\,\in Z}$ constituie două baze Riesz ale căror elemente îndeplinesc condiţia (324), dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia (322).

Se poate afirma că algoritmul lui Mallat poate fi aplicat şi în cazul bazelor biortogonale. Transformarea "wavelet" discretă directă poate fi calculată cu ajutorul sistemului din figura 2.7.1.2.5. Pentru calculul transformării inverse se poate folosi sistemul din figura 4.7.1.2.5, dar sistemele cu răspunsurile la impuls $m_0[n]$ şi $m_1[n]$ trebuiesc înlocuite cu sistemele cu răspuns la impuls $\tilde{m}_0[n]$ şi $\tilde{m}_1[n]$.

În continuare se prezintă câteva exemple de baze biortogonale. În [31] se alege pentru funcţia $\Delta(\omega)$ expresia:

$$\Delta(\omega) = e^{-j\omega} \tag{338}$$

De aceea relaţia (333) devine:

$$\begin{cases} \tilde{m}_0(\omega) = e^{-j\omega} \, m_1^*(\omega+\pi) \;\Leftrightarrow\; m_1(\omega) = -e^{-j\omega} \, \tilde{m}_0^*(\omega+\pi) \\ \tilde{m}_1(\omega) = -e^{-j\omega} \, m_0^*(\omega+\pi) \end{cases} \tag{339}$$

Relaţia (338) se poate generaliza pe baza următoarei propoziţii enunţate de C. Chui, [21].

Teorema 3.7.1.2.8 Fiind date filtrele cu răspuns finit la impuls cu răspunsurile în frecvenţă $m_0(\omega)$ şi $\tilde{m}_0(\omega)$ atunci filtrele cu răspuns finit la impuls cu răspunsurile în frecvenţă $m_1(\omega)$ şi $\tilde{m}_1(\omega)$ conduc la construcţia de baze biortogonale dacă şi numai dacă sunt de forma:

$\tilde{m}_1(\omega) = e^{-j\omega} m_0^*(\omega+\pi)\,k(2\omega)$; $m_1(\omega) = e^{-j\omega}\left[\tilde{m}_0(\omega+\pi)\,k^{-1}(2\omega)\right]^*$

unde $k(\omega) \neq 0, \ (\forall)\ \omega \in R$ şi răspunsul la impuls al filtrului cu răspunsul în frecvență $k(\omega)$ este de clasă l '.

Primul exemplu se referă la cazul funcțiilor spline. Se va nota cu ${}_N\varphi(\tau)$ funcția "B-spline" de ordinul N translatată astfel încât nodurile sale să apară la abscise întregi. Expresiile primelor 3 astfel de funcții sunt:

$${}_1\varphi(\tau) = {}_N\varphi(\tau)$$

$${}_2\varphi(\tau) = \begin{cases} 1+\tau, & -1 \le \tau \le 0 \\ 1-\tau, & 0 \le \tau \le 1 \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases}$$

$${}_3\varphi(\tau) = \begin{cases} \dfrac{(1+\tau)^2}{2}, & -1 \le \tau \le 0 \\ -\left(\tau - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}, & 0 \le \tau \le 1 \\ \dfrac{(2-\tau)^2}{2}, & 1 \le \tau \le 2 \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases} \tag{340}$$

Fiecăreia dintre funcțiile ${}_N\varphi(\tau)$ i se pot asocia mai multe funcții ${}_{\tilde{N},N}\varphi(\tau)$. Diferența dintre aceste funcții este dată de lungimea suportului fiecăreia, care depinde de numărul întreg $\tilde{N}$. În tabelul următor sunt prezentate expresiile polinoamelor ${}_N m_0(\omega)$ și ${}_{\tilde{N},N}\tilde{m}_0(\omega)$ asociate acestor funcții.

Tabelul 1.7.1.2.8 Câteva răspunsuri în frecvență de filtre biortogonale

N	${}_N m_0(\omega)$	$\tilde{N}$	${}_{\tilde{N},N}\tilde{m}_0(\omega)$
1	$\frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\omega}\right)$	1	$\frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\omega}\right)$ - conduce la baza Haar

		3	$-\frac{e^{2j\omega}}{16}+\frac{e^{j\omega}}{16}+\frac{1}{2}+\frac{e^{-j\omega}}{2}+\frac{e^{-2j\omega}}{16}-\frac{e^{-3j\omega}}{16}$
		5	$\frac{3}{256}e^{4j\omega}-\frac{3}{256}e^{3j\omega}-\frac{11}{128}e^{2j\omega}-\frac{11}{128}e^{j\omega}+\frac{1}{2}+$ $\frac{e^{-j\omega}}{2}+\frac{11}{128}e^{-2j\omega}-\frac{11}{128}e^{-3j\omega}-\frac{3}{256}e^{-4j\omega}+\frac{3}{256}e^{-5j\omega}$
2	$\frac{1}{4}\left(e^{j\omega}+2+e^{-j\omega}\right)$	2	$-\frac{1}{8}e^{2j\omega}+\frac{1}{4}e^{j\omega}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}$
		4	$\frac{3}{128}e^{4j\omega}-\frac{3}{64}e^{3j\omega}-\frac{1}{8}e^{2j\omega}+\frac{19}{64}e^{j\omega}+\frac{45}{64}e^{j\omega}+$ $+\frac{45}{64}+\frac{19}{64}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}-\frac{3}{64}e^{-3j\omega}-\frac{3}{128}e^{-4j\omega}$
		6	$-\frac{5}{1024}e^{6j\omega}+\frac{5}{512}e^{5j\omega}+\frac{17}{512}e^{4j\omega}-\frac{39}{512}e^{3j\omega}-$ $\frac{123}{1024}e^{2j\omega}+\frac{81}{256}e^{j\omega}+\frac{175}{256}+\frac{81}{256}e^{-j\omega}+\frac{123}{1024}e^{-2j\omega}$ $+\frac{39}{512}e^{-3j\omega}-\frac{17}{512}e^{-4j\omega}-\frac{5}{512}e^{-5j\omega}-\frac{5}{1024}e^{-6j\omega}$
		8	$2^{-15}\left(35e^{8j\omega}-70e^{7j\omega}-300e^{6j\omega}+670e^{5j\omega}+\right.$ $+1228e^{4j\omega}-3126e^{3j\omega}-3796e^{2j\omega}+10718e^{j\omega}+$ $+22050+10718e^{-j\omega}-3796e^{-2j\omega}-3126e^{-3j\omega}+1228$ $\left.e^{-4j\omega}+670e^{-5j\omega}+300e^{-6j\omega}-70e^{-7j\omega}+35e^{-8j\omega}\right)$

Tabelul 1.7.1.2.8 (continuare)

3		5	$-\frac{5}{512}e^{5j\omega}+\frac{15}{512}e^{4j\omega}-\frac{19}{512}e^{3j\omega}-\frac{97}{512}e^{2j\omega}+$ $+\frac{13}{256}e^{j\omega}+\frac{175}{256}+\frac{175}{256}e^{-j\omega}-\frac{13}{256}e^{-2j\omega}$ $-\frac{97}{512}e^{-3j\omega}+\frac{19}{512}e^{-4j\omega}+\frac{15}{512}e^{-5j\omega}+\frac{5}{512}e^{-6j\omega}$
		7	$2^{-14}\left(35e^{7j\omega}-105e^{6j\omega}-195e^{5j\omega}+865e^{4j\omega}+\right.$ $+336e^{3j\omega}-3489e^{2j\omega}-307e^{j\omega}+11025+$ $+11025e^{-j\omega}-307e^{-2j\omega}-3489e^{-3j\omega}+336e^{-4j\omega}+$ $\left.+865e^{-5j\omega}-195e^{-6j\omega}-105e^{-7j\omega}+35e^{-8j\omega}\right)$

Tabelul 1.7.1.2.8 (sfârşit)

Polinoamele $m_1(\omega)$ şi $\tilde{m}_1(\omega)$ se construiesc folosind relaţiile:

$$\begin{cases} m_1[n] = (-1)^{1-n} m_0[1-n] \\ \tilde{m}_1[n] = (-1)^{1-n} \tilde{m}_0[1-n] \end{cases} \tag{341}$$

sau pe baza relaţiei (339). Trebuie remarcat faptul că funcţiile ${}_N\varphi$, ${}_{\tilde{N},N}\tilde{\varphi}$, ${}_N\psi$, ${}_{\tilde{N},N}\tilde{\psi}$ sunt reale, au suport compact şi sunt simetrice. De asemenea se observă că filtrele ${}_N m_0(\omega)$, ${}_{\tilde{N},N}\tilde{m}_0(\omega)$, ${}_N m_1(\omega)$, ${}_{\tilde{N},N}\tilde{m}_1(\omega)$, au caracteristică de fază liniară şi că toţi coeficienţii lor sunt raţionali, numitoarele acestor numere fiind puteri ale lui 2. Această din urmă calitate conduce la implementări numerice mai rapide ale transformărilor "wavelet" discrete (directă şi inversă) în cazul în care se utilizează aceste baze biortogonale de funcţii wavelet. Dezavantajul funcţiilor duale de acest tip (${}_{\tilde{N},N}\tilde{\varphi}$, ${}_{\tilde{N},N}\tilde{\psi}$) este că regularitatea lor este redusă, în special pentru valori mici ale lui N şi $\tilde{N}$. În [30] baza biortogonală de funcţii "wavelet". Este făcută legătura dintre această teorie şi metoda de prelucrare multirezoluţie a imaginilor bazată pe folosirea filtrului lui Burt.

Alte exemple sunt prezentate în [112]. Performanţele filtrelor cu răspunsurile în frecvenţă $m_o(\omega)$ şi $\tilde{m}_o(\omega)$, $m_1(\omega)$ şi $\tilde{m}_1(\omega)$ introduse în acest articol sunt superioare celor prezentate anterior.

În [141] se prezintă o modalitate de construcţie a bazelor biortogonale de funcţii "wavelet" bazată pe algoritmul lui Euclid.

Trebuie remarcat că la fel ca şi în cazul bazelor ortonormale de funcţii "wavelet" şi în cazul bazelor biortogonale de funcţii "wavelet" se poate pune problema creşterii localizării în domeniul frecvenţă a funcţiilor "wavelets mother" obţinute. Şi în acest caz se poate pune problema unor valori ale factorului de dilatare a_o superioare lui 2. În paragraful 7.1.2.7 s-a arătat că în cazul bazelor ortonormale pot fi generate noi analize multirezoluţie, pornind de la o analiză multirezoluţie dată, generată de funcţia de scară ${}_o\varphi$, prin utilizarea funcţiei de scară ${}_o\varphi(N\tau)$ şi a N - 1 funcţii de tip "wavelet" $\psi_l(\tau)$, $l = \overline{1, N-1}$. Unele dintre aceste funcţii "wavelet's mother" generatoarea descompunerii ortogonale corespunzătoare analizei multirezoluţie considerată. Şi în cazul bazelor biortogonale poate fi folosită o astfel de metodă de generare a noi şiruri de subspaţii $\left\{ {}_nW_m \right\}_{m \in Z}$ asociate unei analize multirezoluţie impusă. O astfel de construcţie este prezentată în [9].

Pornind de la funcţia $\varphi(\tau)$ şi $\tilde{\varphi}(\tau)$ care generează analizele multirezoluţie $\left\{ {}_iV_m \right\}_{m \in Z}$ şi $\left\{ {}_i\tilde{V}_m \right\}_{m \in Z}$ care satisfac condiţiile pentru construcţia unor baze biortogonale de funcţii "wavelet" ((318), (319), (320), etc.), pot fi construite funcţiile ${}_n\varphi(\tau)$, ${}_n\tilde{\varphi}(\tau)$, $\psi_l(\tau)$ şi $\tilde{\psi}_l(\tau)$, $l = \overline{1, N-1}$, care generează prin scalare cu N şi translatare spaţiile ${}_nV_m$, ${}_n\tilde{V}_m$, ${}_nW_{m,l}$, ${}_n\tilde{W}_{m,l}$.

De fapt aceste spaţii sunt generate de funcţiile:

$$\begin{cases} {}_n\varphi_{m,k}(\tau) = N^{\frac{m}{2}}\,\varphi\left(N^m\tau - k\right), \quad {}_n\tilde{\varphi}_{m,k}(\tau) = N^{\frac{m}{2}}\,\tilde{\varphi}\left(N^m\tau - k\right) \\ \psi_{l\,m,k}(\tau) = N^{\frac{m}{2}}\,\psi_l\left(N^m\tau - k\right) \\ \qquad\qquad l = \overline{1, N-1} \\ \tilde{\psi}_{l\,m,k}(\tau) = N^{\frac{m}{2}}\,\tilde{\psi}_l\left(N^m\tau - k\right) \end{cases} \tag{342}$$

Cu ajutorul fiecărui şir de astfel de spaţii poate fi realizată o descompunere a lui $L^2(R)$:

$$\begin{aligned} {}_nV_m &= {}_nV_{m-1} \oplus W_{m-1,1} \oplus \ \ldots \oplus W_{m-1,N-1}\ , \\ {}_n\tilde{V}_m &= {}_n\tilde{V}_{m-1} \oplus \tilde{W}_{m-1,1} \oplus \ldots \ \ldots \oplus \tilde{W}_{m-1,N-1}\ , \end{aligned}$$

$$\overline{\bigcup_{l=1}^{N-1} \bigcup_{m \in Z} {}_nW_{m,\,l}} = \overline{\bigcup_{l=1}^{N-1} \bigcup_{m \in Z} {}_n\widetilde{W}_{m,\,l}} = L^2(R) \tag{343}$$

De aceea orice semnal de energie finită $x(\tau)$ poate fi exprimat în forma:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{m \in Z} \sum_{k \in Z} \left\langle x,\, \widetilde{\psi}_{l,\,m,\,k} \right\rangle \psi_{l,\,m,\,k}(\tau) = \\ &= \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{m \in Z} \sum_{k \in Z} \left\langle x,\, \psi_{l,\,m,\,k} \right\rangle \widetilde{\psi}_{l,\,m,\,k}(\tau) \end{aligned} \tag{344}$$

Construcția funcțiilor ${}_n\varphi(\tau)$, ${}_n\widetilde{\varphi}(\tau)$, $\psi_l(\tau)$ și $\widetilde{\psi}_l(\tau)$, $l = \overline{1, N-1}$ este descrisă în [9]. Este demonstrată și proprietatea de biortogonalitate. În acest caz transformarea "wavelet" discretă poate fi calculată folosind sistemul din figura 2.7.1.2.8.

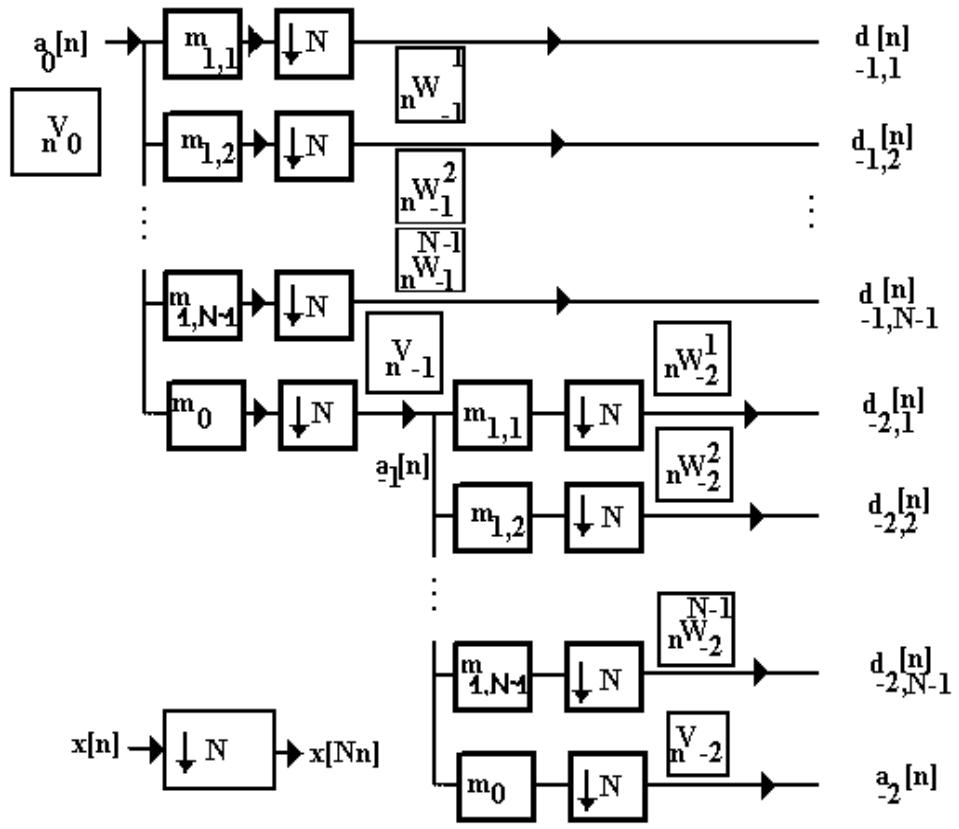


Figura 2.7.1.2.8 Sistem de calcul (două iterații) al transformării "wavelet" discretă, în cazul funcțiilor "wavelet" biortogonale când factorul de scalare a_o este egal cu N.

Transformarea "wavelet" inversă se calculează cu sistemul prezentat în figura 3.7.1.2.8. La sistemele prezentate în ultimele două figuri se poate ajunge şi urmând o cale care nu iese din contextul prelucrării semnalelor în timp discret. Astfel se poate porni de la noţiunea de analiză multirezoluţie a semnalelor în timp discret. Această noţiune a fost definită de Oliver Rioul în [121].

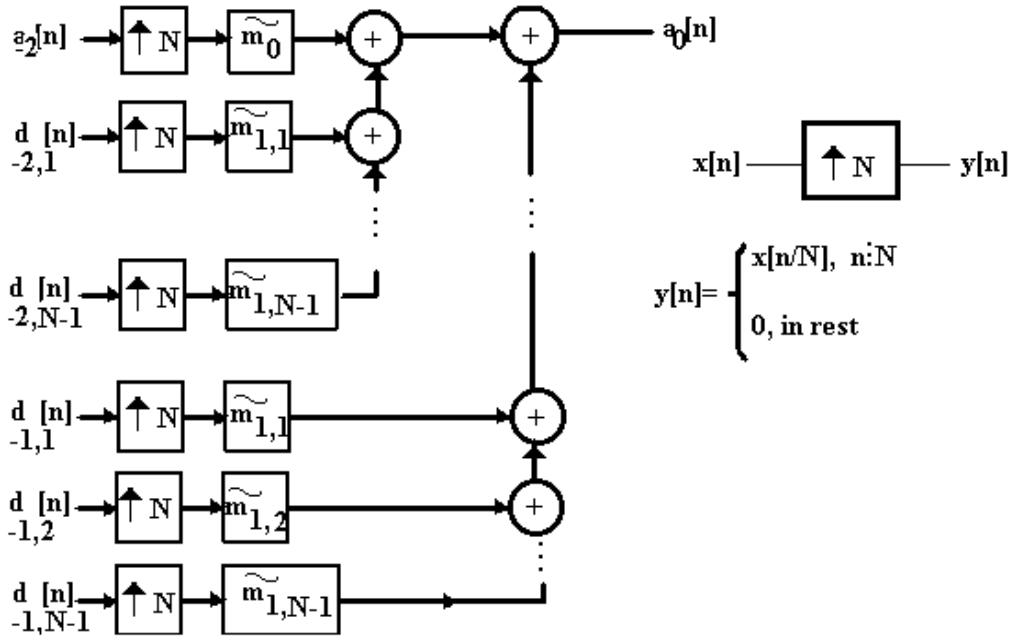


Figura 3.7.1.2.8 Sistem de calcul al transformării "wavelet" discretă inversă, corespunzătoare transformării implementate în sistemul din figura 2.7.1.2.8.

Legătura dintre teoria funcţiilor "wavelet" şi teoria băncilor de filtre numerice este prezentată în [29]. În [126] este făcută legătura dintre conceptul de analiză multirezoluţie a semnalelor în timp discret şi teoria băncilor de filtre numerice. Rezultă scheme identice cu cele din figurile 2.7.1.2.8 şi 3.7.1.2.8.

Exemple de filtre cu răspunsurile în frecvenţă $m_o(\omega)$, $\tilde{m}_o(\omega)$, $m_{1,l}(\omega)$ şi $\tilde{m}_{1,l}(\omega)$, $l = \overline{1, N-1}$ şi cu răspuns finit la impuls sunt prezentate în [8]. Exemple de filtre cu răspuns infinit la impuls care au acelaşi scop sunt prezentate în [9]. Noile analize multirezoluţie obţinute $\{{}_nV_m\}_{m \in Z}$ şi $\{{}_n\tilde{V}_m\}_{m \in Z}$ pot avea performanţe superioare analizelor multirezoluţie iniţiale $\{{}_iV_m\}_{m \in Z}$ şi $\{{}_i\tilde{V}_m\}_{m \in Z}$.

Se poate pune, de exemplu, problema alegerii acelei analize multirezoluție care să realizeze cea mai bună aproximare, de rezoluție *m* ,din punct de vedere al erorii medii pătratice a unui semnal dat. Această problemă este rezolvată cu ajutorul analizelor multirezoluție $\left\{ {}_{n}V_{m} \right\}_{m \in Z}$, $\left\{ {}_{n}\tilde{V}_{m} \right\}_{m \in Z}$. O modalitate modernă de construcție a bazelor biortogonale de funcții "wavelet" este bazată pe metoda numită "lifting scheme" (schema de înfrumusețare prin operație estetică). Această metodă este prezentată în [133]. Ea porneşte de la observația următoare:

Lema 1.7.1.2.8 (Vetterli-Herley) Se fixează o funcție de scară cu suport compact φ şi fie $m_o[n]$ filtrul cu răspuns finit la impuls asociat acesteia:

$$F\{\varphi\}(\omega) = \overline{\prod_{n=1}^{|} m_o\left(\frac{\omega}{2^n}\right)}$$

Se consideră două filtre cu răspuns finit la impuls $\tilde{m}_o[n]$ şi $\tilde{m}_o^o[n]$, duale în raport cu $m_o[n]$, ambele biortogonale în raport cu $m_o[n]$:

$$m_o^*(\omega)\tilde{m}_o(\omega) + m_o^*(\omega+\pi)\tilde{m}_o(\omega+\pi) = 1$$

$$m_o^*(\omega)\tilde{m}_o^o(\omega) + m_o^*(\omega+\pi)\tilde{m}_o^o(\omega+\pi) = 1$$

cu:

$$m_o(0) = \tilde{m}_o(0) = \tilde{m}_o^o(0) = 1$$

care conduc la construcția funcțiilor $\tilde{\varphi}$ şi $\tilde{\varphi}_o$ cu ajutorul cărora pornind de la funcția φ pot fi construite două perechi de baze biortogonale de funcții "wavelet". Atunci, răspunsurile în frecvență $\tilde{m}_o(\omega)$ şi $\tilde{m}_o^o(\omega)$ sunt legate prin relația:

$$\tilde{m}_o(\omega) = \tilde{m}_o^o(\omega) + e^{-j\omega}\left[m_o(\omega+\pi)s(2\omega) \right]^* \qquad (345)$$

unde $s(\omega)$ este un polinom trigonometric.

Lema Vetterly-Herley are următorul corolar:

Corolar 1.7.1.2.8 Fiind dată mulțimea $\{m_o, \tilde{m}_o^o, m_1^o, \tilde{m}_1\}$ de filtre biortogonale cu răspuns finit la impuls, noua mulțime $\{m_o, \tilde{m}_o, m_1, \tilde{m}_1\}$ de filtre biortogonale cu răspuns finit la impuls poate fi construită pe baza relațiilor:

$$\tilde{m}_o(\omega) = \tilde{m}_o^o(\omega) + \tilde{m}_1(\omega)s^*(2\omega) \qquad (346)$$

$$m_1(\omega) = \tilde{m}_1^o(\omega) - m_o(\omega)s(2\omega) \qquad (347)$$

unde $s(\omega)$ este un polinom trigonometric.

Procedeul de construcţie al noii mulţimi de filtre biortogonale cu răspuns finit la impuls se numeşte "lifting scheme". Acest procedeu conduce la construcţia unor noi baze biortogonale ale lui $L^2(R)$. Modul în care se face această construcţie este descris prin următoarea propoziţie.

Teorema 4.7.1.2.8. (lifting scheme) Fiind dată mulţimea iniţială de funcţie de scară şi funcţii "wavelet" biortogonale $\{\varphi, \tilde{\varphi}^o, \psi^o, \tilde{\psi}^o\}$, poate fi construită o nouă mulţime de funcţii "formal" biortogonale $\{\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}\}$ pe baza relaţiilor:

$$\psi(\tau) = \psi^o(\tau) - \sum_k s[k]\,\varphi(\tau - k) \tag{348}$$

$$\tilde{\varphi}(\tau) = 2\sum_k \tilde{m}_o^o[k]\,\tilde{\varphi}(2\tau - k) + \sum_k s[-k]\,\tilde{\psi}(\tau - k) \tag{349}$$

$$\tilde{\psi}(\tau) = 2\sum_k \tilde{m}_1[k]\,\tilde{\varphi}(2\tau - k) \tag{350}$$

unde coeficienţii $s[k]$ pot fi aleşi oricum.

Trebuie remarcat că funcţiile obţinute sunt formal biortogonale. Teorema 4.7.1.2.8 nu garantează că funcţia $\tilde{\psi}$ este în $L^2(R)$ sau că funcţiile "wavelets" obţinute generează o bază Riesz.

În consecinţă, pentru fiecare alegere a semnalului în timp discret $s[k]$ trebuie verificate calităţile noilor funcţii φ, ψ şi $\tilde{\psi}$ obţinute.

Dacă lungimea secvenţei $s[k]$ este finită şi dacă filtrele iniţiale sunt cu răspuns finit la impuls atunci toate cele 4 funcţii φ, $\tilde{\varphi}$, ψ şi $\tilde{\psi}$ au suport compact.

Este interesant să se determine condiţii asupra semnalului în timp discret $s[k]$ astfel încât funcţiile ψ, $\tilde{\varphi}$ şi $\tilde{\psi}$ să aibă proprietăţi utile (să conducă la baze biortogonale, să aibă cât mai multe momente nule, etc.).

În continuare se dă un exemplu de aplicare a metodei descrise. Pornind de la funcţia $\psi_H(\tau)$ se încearcă, pe baza metodei descrise anterior, să se crească numărul de momente nule ale funcţiei "wavelet" de la 1 la 2. Întrucât este vorba despre a descompunere ortogonală a lui $L^2(R)$ în acest caz avem:

$$\tilde{m}_o^o(\omega) = m_{oH}(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

şi

$$\tilde{m}_1(\omega) = m_1^o(\omega) = m_{1H}(\omega) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} \tag{351}$$

Aplicând relația (347) se obține:

$$m_1(\omega) = m_1^o(\omega) - m_{oH}(\omega)s(2\omega)$$

Pentru ca noua funcție "wavelet" să aibă două momente nule este necesar ca:

$$\begin{cases} m_1(0) = 0 \\ m_1'(0) = 0 \end{cases} \tag{352}$$

Prima condiție este echivalentă cu:

$$s_2(0) = 0 \tag{353}$$

Cea de a doua condiție este echivalentă cu:

$$0 = m_1^{o\,\prime}(0) - m_{oH}'(0)s(0) - 2m_{oH}(0)s'(0)$$

sau cu:

$$0 = -\frac{j}{2} + \left(+\frac{j}{2}\right)(0) - 2s'(0)$$

adică cu:

$$s'(0) = -\frac{j}{4} \tag{354}$$

Pentru a obține funcții de scară duale şi funcții "wavelet" simetrice se alege:

$$s(\omega) = -\frac{j}{4}\sin\omega$$

În consecință:

$$m_1(\omega) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(-\frac{j}{4}\sin 2\omega\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{j}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(\frac{e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}}{2j}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}e^{2j\omega} + \frac{1}{16}e^{j\omega} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} - \frac{1}{16}e^{-2j\omega} - \frac{1}{16}e^{-3j\omega}$$

Pe baza relaţiei (345) se obţine:

$$\tilde{m}_0(\omega) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) + e^{-j\omega}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right]^* \left[\frac{j}{4}\sin 2\omega\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j\omega}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{j\omega}\right)\left(\frac{j}{4}\sin 2\omega\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{16}\left(e^{-j\omega} - 1\right)\left(e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{16}\left(e^{j\omega} - e^{-3j\omega} - e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}\right) =$$

$$= -\frac{1}{16}e^{2j\omega} + \frac{1}{16}e^{j\omega} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{16}e^{-2j\omega} - \frac{1}{16}e^{-3j\omega}$$

Se constată că funcţiile $m_{0H}(\omega)$ şi $\tilde{m}_0(\omega)$ sunt identice cu funcţiile ${}_1m_0(\omega)$ şi ${}_{3,1}\tilde{m}_0(\omega)$ din tabelul 1.7.1.2.8. Deci metoda "lifting scheme" a funcţionat în acest exemplu. S-a pornit de la o funcţie de scară generatoare a unei baze ortonormale de funcţii "wavelet" şi s-a ajuns la o bază biortogonală cunoscută. E clar că metoda este duală. Modificând filtrele m_0 şi $\tilde{m}_1$ şi păstrând nemodificate filtrele $\tilde{m}_0$ şi m_1, se poate ajunge la mulţimea $\{m_0, \tilde{m}_0, m_1, \tilde{m}_1\}$. Polinomul trigonometric utilizat pentru transformare se notează cu $\tilde{s}$. În acest mod funcţia de scară duală rămâne neschimbată în timp ce funcţia de scară şi cele două funcţii "wavelet" duale se modifică. Metodele de construcţie directă şi duală pot fi iterate. Astfel după ce a fost crescut, de exemplu numărul de momente nule ale funcţiei "wavelet", se poate utiliza metoda de construcţie duală pentru a se creşte numărul de momente nule ale funcţiei "wavelet" duală. Alternând cele două metode de construcţie, directă şi duală, poate fi obţinută o analiză multirezoluţie cu proprietăţi dorite. Metodele de construcţie ale bazelor biortogonale bazate pe "lifting scheme" au unele avantaje. Ecuaţia (348) permite accesul direct la expresia funcţiei "wavelet" care va fi construită permiţând alegerea semnalului $s[k]$ astfel încât funcţia $\psi(\tau)$ să satisfacă anumite proprietăţi impuse, economisindu-se în acest mod mult timp de proiectare. Folosirea metodei descrise conduce la o creştere a vitezei de calcul a transformărilor "wavelet". Metoda de construcţie prezentată este utilă la construcţia funcţiilor "wavelet" de generaţia a 2-a, care nu reprezintă translatate şi dilatate ale unei funcţii unice.Alte modalităţi de construcţie ale bazelor biortogonale de funcţii "wavelet" sunt prezentate în capitolele următoare.

7.1.2.9 GENERALIZAREA CONCEPTULUI DE ANALIZĂ MULTIREZOLUȚIE

Paragrafele anterioare au evidențiat importanța conceptului de analiză multirezoluție. Se observă chiar că există posibilitatea de a face o clasificare a analizelor multirezoluție, ca în tabelul 1.7.1.2.9.

Tipul de analiză multirezoluție	Prin ce se caracterizează	Tipul descompunerii corespunzătoare a spațiului $L^2(R)$	Tipul bazei de funcții wavelet al lui $L^2(R)$
ortogonală	$\{{}_o\varphi(\tau-k)\}_{k\in Z}$ bază ortogonală a lui V_o	ortogonală	ortogonală
semiortogonală	$\{\varphi(\tau-k)\}_{k\in Z}$ bază Riesz a lui V_o	ortogonală	ortogonală
corespunz. la funcții wavelet semiortogonale		ortogonală	Riesz
biortogonală	$\{\varphi(\tau-k)\}_{k\in Z}$ bază Riesz a lui V_o $\{\tilde{\varphi}(\tau-k)\}_{k\in Z}$ bază Riesz a lui $\tilde{V}_o$	neortogonală	$\{\psi(\tau-k)\}_{k\in Z}$ bază Riesz a lui W_o $\{\tilde{\psi}(\tau-k)\}_{k\in Z}$ bază Riesz a lui $\tilde{W}_o$

Tabelul 1.7.1.2.9 O clasificare a analizelor multirezoluție

Toate aceste tipuri de analiză multirezoluție au în comun proprietăți de tipul 1-5 din defini•ia 1.7.1.2.2 şi reprezintă descompuneri ale spațiului $L^2(R)$.

A. O primă posibilitate de a generaliza conceptul de analiză multirezoluție este bazată pe înlocuirea spațiului $L^2(R)$ cu spațiul $L^2(R^n)$. Este interesant cazul n = 2 pentru care se obțin aplicații la prelucrarea imaginilor. Proprietățile 1- 4 rămân neschimbate. Proprietatea 5 devine în acest caz:

5'. Există o funcție ${}_n\varphi(\tau)$ în V_o astfel încât mulțimea $\{{}_n\varphi(\tau-k)\}_{k\in Z^n}$ să fie o bază Riesz în V_o. Acestă funcție de scară corespunde unei funcții de scară ortogonală, ${}_{no}\varphi(\tau)$, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ care verifică relația:

$$\sum_{l\in Z^n} \left| F\{{}_{no}\varphi\}(\omega_1 + 2\pi l_1, \omega_2 + 2\pi l_2, \ldots \omega_n + 2\pi l_n) \right|^2 = 1$$

Funcția de scară ortogonală ${}_{n\,o}\varphi\left(\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots\ ,\ \tau_n\right)$ este generată de filtrul cu răspunsul în frecvență $m_o\left(\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ ,\ \omega_n\right)$ care are proprietatea:

$$\sum_{\left(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\right)\in[0,\,1]^n}\left|{}_n m_o\left(\omega_1+\varepsilon_1\,\pi,\ \ldots\omega_n+\varepsilon_n\,\pi\right)\right|^2=1$$

Un caz particular de astfel de analiză multirezoluție poate fi construit cu ajutorul produsului tensorial.

Pornind de la analiza multirezoluție $\left\{V_m\right\}_{m\in Z}$ a lui $L^2(R)$ şi funcțiile corespunzătoare φ, ψ, m_o, m_1, se poate defini o analiză multirezoluție a lui $L^2\left(R^n\right)$ prin:

$${}_nV_m=\left(\bigotimes_{n=1}^{n}\right)V_m \tag{355}$$

Funcția de scară şi răspunsul în frecvență al filtrului care o generează devin:

$${}_n\varphi\left(\tau_1,\ \ldots\ ,\ \tau_n\right)=\varphi\left(\tau_1\right)\ldots\ \varphi\left(\tau_n\right) \tag{356}$$

$${}_nm_o\left(\omega_1,\ \ldots\ ,\ \omega_n\right)=m_o\left(\omega_1\right)\ldots\ m_o\left(\omega_n\right) \tag{357}$$

Aceste funcții generează 2^n-1 funcții de tip "wavelet" şi acelaşi număr de filtre corespunzătoare. Expresiile răspunsurilor în frecvență ale acestor filtre sunt:

$${}_nm_\varepsilon\left(\omega_1,\ldots,\omega_n\right)=m_{\varepsilon_1}\left(\omega_1\right)\ldots m_{\varepsilon_n}\left(\omega_n\right);\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\right)\in\{0,1\}^n-(0,0,\ldots,0) \tag{358}$$

Funcțiile "wavelet" ${}_n\psi_\varepsilon(\tau)$ corespunzătoare se deduc şi sunt produse ale funcțiilor φ şi ψ.

B. După cum s-a arătat deja, Oliver Rioul a definit conceptul de analiză multirezoluție a spațiului $l^2(Z)$, în [122]. Se porneşte de la sistemul de reconstrucție perfectă în urma codării în subbenzi din figura 1.7.1.2.9. Ținând seama de expresia produsului scalar definit pe $l^2(Z)$ relația (290) poate fi rescrisă în forma:

$$\begin{cases}a_{-1}[n]=\left\langle a_o[k],\ m_o^{\vee *}[k-2n]\right\rangle\\ d_{-1}[n]=\left\langle a_o[k],\ m_1^{\vee *}[k-2n]\right\rangle\end{cases} \tag{359}$$

În teoria băncilor de filtre numerice sistemul cu răspunsul la impuls:

$$_{p\,c}m_o[n] \;=\; m_o^{\vee *}[n] \;=\; m_o^{*}[-n]$$

se numeşte sistem paraconjugat sistemului la impuls $m_o[n]$. Relația (359) se mai scrie:

$$\begin{cases} a_{-1}[n] \;=\; \left\langle a_o[k],\; _{p\,c}m_o[k-2n] \right\rangle \\ d_{-1}[n] \;=\; \left\langle a_o[k],\; _{p\,c}m_1[k-2n] \right\rangle \end{cases} \tag{360}$$

De aceea relația de sinteză (288) poate fi scrisă în forma:

$$a_o[n] = \sum_k \left\langle a_o[k],_{p\,c} m_o[k-2n] \right\rangle \tilde{m}_o[n-2k] + \left\langle a_o[k],_{p\,c} m_1[k-2n] \right\rangle \tilde{m}_1[n-2k] \tag{361}$$

Ultima relație reprezintă descompunerea semnalului $a_o[n]$ în baza:

$$B_s \;=\; \left\{ \tilde{m}_o[n-2k],\; \tilde{m}_1[n-2k] \right\}_{k\in Z} \tag{362}$$

a spațiului $l^2(Z)$. Baza dual ă este mulțimea:

$$B_a \;=\; \left\{ _{p\,c}m_o[n-2k],\; _{p\,c}m_1[n-2k] \right\}_{k\in Z} \tag{363}$$

Relația de reconstrucție perfectă (309), devine pe baza celei de a doua ecuații din relația (306):

$$\sum_p \left[(-1)^{n-1} + (-1)^{2n-2p-1} \right] \tilde{m}_1[n-p]\, m_1[p] \;= -2\,\delta[n]$$

Pentru:

$$n \;=\; 2\,q$$

ultima relație devine:

$$-2\sum_p \tilde{m}_1[2q-p]\, m_1[p] \;= -2\,\delta[q]$$

Cu notația:

$$q \;=\; k - \;l$$

rezult•:

$$\sum_{p} \tilde{m}_1[2k - 2\,l\, - p]\, m_1[p] \;=\; \delta[k - l]$$

sau cu schimbare de variabilă: $r \;=\; 2\,l + p$ se obține:

$$\sum_{r} \tilde{m}_1[2k - r]\, m_1[r - 2\,l] \;=\; \delta[k - l]$$

Dacă se consideră că funcțiile $m_0[n]$ şi $m_1[n]$ sunt reale, ultima relație se poate scrie sub forma:

$$\sum_{r} \tilde{m}_1[2k - r]\; {}_{p\,c}m_1[2\,l - r] \;=\; \delta[k - l]$$

sau:

$$\sum_{r} {}_{p\,c}\tilde{m}_1[r - 2k]\; m_1^{*}[r - 2\,l] \;=\; \delta[k - l]$$

adică:

$$\left\langle {}_{p\,c}\tilde{m}_1[n - 2k]\,,\; m_1[n - 2\,l] \right\rangle \;=\; \delta[k - l] \qquad (364)$$

Deci funcțiile de bază a celor două familii de analiză $\left\{m_1[n - 2k]\right\}_{k \in Z}$ şi de sinteză $\left\{ {}_{p\,c}\tilde{m}_1[n - 2k] \right\}_{k \in Z}$ sunt mutual ortogonale, cu excepția cazului când argumentele celor două funcții coincid.

Se poate verifica condiția de biortogonalitate şi în cazul general. Bazele B_a şi B_s sunt biortogonale [122].

Cazul analizei multirezoluție ortogonală rezultă pentru:

$$m_1[n] \;=\; {}_{p\,c}\tilde{m}_1[n] \quad ; \qquad m_o[n] \;=\; {}_{p\,c}\tilde{m}_o[n] \qquad (365)$$

atunci când funcțiile de analiză şi sinteză coincid.

În continuare se introduc noțiunile de scară şi de rezoluție în timp discret. Versiunea de scară superioară a unui semnal dat este un semnal similar dar obținut prin eşantionare cu o frecvență mai mare. Versiunea de scară inferioară a unui semnal în timp discret dat este un semnal similar dar obținut prin folosirea unei frecvențe de eşantionare inferioară.

Operatorul de dublare a scării este operatorul care descrie sistemul compus prin conectarea în serie a unui filtru cu răspunsul în frecvență $\alpha(\omega)$ şi un circuit de interpolare cu 2. Acest operator se notează cu $\alpha\uparrow$.

Operatorul de înjumătățire a scării este operatorul care descrie sistemul compus prin conectarea în serie a unui filtru cu răspunsul în frecvență $\alpha(\omega)$ şi un circuit de decimare cu 2. Acest operator se notează cu $\downarrow\alpha$.

Semnalele $a_{-1}[n]$ şi $d_{-1}[n]$ din figura 1.7.1.2.9 se obțin prin aplicarea operatorilor $\downarrow m_0$ şi $\downarrow m_1$. Reconstrucția se face cu ajutorul operatorilor $\uparrow \tilde{m}_0$ şi $\uparrow \tilde{m}_1$.

Fie $s(y)$ scara unui semnal $y[n]$. Considerând că semnalul original $a_0[n]$ are scara $s(a_0) = 1$, pot fi aplicați succesiv operatorii de modificare a scării pentru a se ajunge la semnalul $y[n]$ de scară $s(y)$.

De exemplu dacă:

$$y = (\alpha\uparrow)^5(\downarrow\beta)^8 a_o$$

atunci:

$$s(y) = 2^{5-8} = \frac{1}{8}$$

Există mai multe posibilități de a ajunge la scara $1/8$ pornind de la scara 1. E deci necesar un alt parametru pentru a caracteriza două versiuni diferite, de aceeaşi scară, ale uni semnal impus. Acest parametru se numeşte rezoluție şi descrie cantitatea de informație prezentă în semnal. Semnalul inițial, a_0, are rezoluția 1. Semnalul $(\downarrow\alpha)a_0$ are un număr de eşantioane egal cu jumătate din numărul de eşantioane al semnalului $a_0[n]$. Se zice că noul semnal are rezoluția $1/2$. Notând cu r rezolu•ia avem:

$$r(\downarrow\alpha\, a_o) = \frac{1}{2} = \frac{r(a_o)}{2}$$

Sunt valabile relațiile:

$$\begin{cases} r(\alpha\uparrow x) = r(x) \\ r(\downarrow\beta\, y) = \begin{cases} \dfrac{r(y)}{2}, & daca \quad r(y) = s(y) \\ r(y), & daca \quad r(y) < s(y) \end{cases} \end{cases} \tag{366}$$

Oricare ar fi semnalul y e valabilă relația:

$$r(y) \le s(y) \tag{367}$$

În [122] este demonstrată următoarea propoziție:
Fiind dată o scară *s* şi o rezoluție *r* ($r \le s$), există o singură versiune *x* a semnalului a_o la această scară şi cu această rezoluție, dacă şi numai dacă:

$$\downarrow m_o \, \tilde{m}_o \uparrow = Id \; ; \quad \downarrow m_1 \, \tilde{m}_1 \uparrow = Id \tag{368}$$

unde cu I*d* s-a notat operatorul identitate.

Dar condiția (368) este identică cu condiția (364) de biortogonalitate. O versiune a semnalului original $a_o[n]$ de rezoluție *r* ($r < 1$) conține toată informația necesară pentru a obține orice altă variantă a semnalului original, de rezoluție *r*' inferioară lui *r*.

Se defineşte semnalul reziduu al unui semnal dat *x*, la scara *s* şi de rezoluție *r*, ca fiind semnalul care trebuie adăugat versiunii lui *x* la scara *s* de rezoluție *r* , $x_{s,r}$, pentru a i se dubla rezoluția. Se poate scrie:

$$d_{s,r} = x_{s,2r} - x_{s,r} \tag{369}$$

Trebuie observat că:

$$s \ge 2r$$

E uşor de observat că reziduul $d_{s,r}$ se supune aceloraşi reguli de modificare a scării şi a rezoluției ca urmare a acțiunii operatorilor de modificare a scării ca şi semnalul $x_{s,r}$. Singura excepție este că dacă $s = 2r$, atunci:

$$\downarrow m_1 \, d_{s,r} = 0 \tag{370}$$

Descompunerea multirezoluție în timp discret constă în iterarea relației (369) astfel încât să se reconstruiască semnalul original $a_o[n]$ ca o sumă a reziduurilor de la toate nivelele de rezoluție $r = 2^{-m}$, $m = \overline{1, M}$ care apar:

$$a_o[n] = \sum_{m=1}^{M} d_{s=1, r=2^{-m}} + a_{o\, s=1, r=2^{-M}} \tag{371}$$

Spațiul V_o al spațiului multirezoluție este identic cu $l^2(Z)$.

Proiecția semnalului $a_o[n]$ din V_o pe spațiul V_{-1} se realizează cu ajutorul operatorului $\downarrow m_o$, obținându-se semnalul $a_{-1}[n]$. Proiecția semnalului $a_o[n]$ pe

spațiul V_{-m} este semnalul $a_{-m}[n]$ și este obținută prin aplicarea operatorului $(\downarrow m_o)^m$. O bază a spațiului V_o este $\{{}_{pc}m_o[n-2k], {}_{pc}m_1[n-2k]\}_{k\in Z}$. Mulțimea $\{{}_{pc}m_o[n-2k]\}_{k\in Z}$ reprezintă o bază a spațiului V_{-1} iar mulțimea $\{{}_{pc}m_1[n-2k]\}_{k\in Z}$ reprezintă o bază a spațiului W_{-1}.

Succesiunea de spații $\{V_{-m}\}_{m=\overline{0,M}}$ este un exemplu de analiză multirezoluție a spațiului $l^2(Z)$.

Se poate demonstra că elementele analizei multirezoluție ortogonală au proprietățile:

$$V_{-m-1} \subset V_{-m}, \quad m = \overline{0, M} \tag{372}$$

$$\bigcap_{m\in N} V_{-m} = \{0\} \tag{373}$$

$$\bigcup_{m=0}^{M} V_{-m} = l^2(Z) \tag{374}$$

Baza ortonormală a spațiului V_o este mulțimea $\{\delta[n-k]\}_{k\in Z}$. Aplicând elementelor acestei mulțimi operatorul $(\downarrow m_o)^m$ se obține baza spațiului V_{-m}, $m = \overline{1,M}$.

Noțiunea de analiză multirezoluție pentru semnalele în timp discret este strâns legată de transformarea "wavelet" discretă.

De fapt, secvențele obținute prin aplicarea acestei transformări sunt:

$$\begin{cases} d_m = \downarrow m_1 (\downarrow m_o)^{m-1} a_o, & m = \overline{1, M} \\ a_m = (\downarrow m_o)^m a_o \end{cases} \tag{375}$$

Transformarea "wavelet" discretă inversă poate fi descrisă cu relația:

$$a_o = \left[\sum_{m=1}^{M} (\tilde{m}_o \uparrow)^{m-1} \tilde{m}_1 \uparrow d_m \right] + (\tilde{m}_o \uparrow)^M a_m \tag{376}$$

În [122] sunt demonstrate formulele de analiză:

$$\begin{cases} d_m[k] = \left\langle a_o[n],\ \left(\left({}_{pc}m_o \uparrow \right)^{m-1} {}_{pc}m_1 \right)\left[n - 2^m k \right] \right\rangle \\ a_m[k] = \left\langle a_1[n],\ \left(\left({}_{pc}m_o \uparrow \right)^{m-1} {}_{pc}m_o \right)\left[n - 2^m k \right] \right\rangle \end{cases} \tag{377}$$

Folosind notațiile:

$$\left({}_{pc}m_o \uparrow \right)^{m-1} {}_{pc}m_1 = {}_{pc}m_1^m \ ; \qquad \left({}_{pc}m_o \uparrow \right)^{m-1} {}_{pc}m_o = {}_{pc}m_o^m$$

ultima relație devine:

$$\begin{cases} d_m[k] = \left\langle a_o[n],\ {}_{pc}m_1^m \left[n - 2^m k \right] \right\rangle \\ a_m[k] = \left\langle a_o[n],\ {}_{pc}m_1^M \left[n - 2^m k \right] \right\rangle \end{cases} \tag{378}$$

Funcțiile ${}_{pc}m_o^m \left[n - 2^m k \right]$ formează bazele spațiilor V_{-m}. Funcțiile ${}_{pc}m_1^m \left[n - 2^m k \right]$ formează bazele spațiilor W_{-m} şi se numesc funcții "wavelet" de analiză în timp discret.

Transformarea "wavelet" discretă inversă se exprimă prin:

$$a_o[n] = \sum_{m=1}^{m} \sum_{k} d_m[k]\, \tilde{m}_1^m \left[n - 2^m k \right] + \sum_{k} a_M[k]\, \tilde{m}_o^M \left[n - 2^M k \right] \tag{379}$$

Funcțiile $\tilde{m}_o^m \left[n - 2^m k \right]$ formează bazele spațiilor $\tilde{V}_{-m}$. Funcțiile $\tilde{m}_1^m \left[n - 2^m k \right]$ formează bazele spațiilor $\tilde{W}_{-m}$ şi se numesc funcții "wavelet" de sinteză în timp discret.

Se poate demonstra că bazele acestor spații sunt biortogonale pentru orice valoare a lui *m* cuprinsă între 1 şi M.

În cazul analizei multirezoluție ortogonală:

$${}_{pc}m_1^m = \tilde{m}_1^m \ , \qquad {}_{pc}m_o^M = \tilde{m}_o^M$$

Atunci mulțimea $\left\{ \tilde{m}_1^m \left[n - 2^m k\right],\ \tilde{m}_o^M \left[n - 2^M k\right]\right\}_{m = \overline{1, M},\ k \in Z}$ este o bază ortonormală a lui $l^2(Z)$. În [30] rezultatele prezentate anterior sunt extinse la spațiul $l^2\left(Z^4\right),\ n \in N$.

C. În numeroase aplicații semnalul de analizat $x(\tau)$ are durată limitată

$$supp\left\{x(\tau)\right\} \neq [\alpha,\ \beta]$$

În consecință spațiul care trebuie descompus este $L^2[\alpha, \beta]$ şi nu $L^2(R)$.

Este de interes construcția unei analize multirezoluție a acestui spațiu. Cu ajutorul unei astfel de analiză multirezoluție poate fi construit un nou tip de funcții "wavelet" numite funcții "wavelet" pe interval.

În continuare pentru comoditate, se va considera cazul:

$$\alpha = 0;\quad \beta = 1$$

E clar că $x(\tau) \in L^2(R)$. În consecință pentru aproximarea lui $x(\tau)$ poate fi utilizată o analiză multirezoluție a lui $L^2(R)$. În acest scop se poate considera că:

$$x(\tau) = 0,\ \tau \notin [0, 1]$$

Această ipoteză poate însă să introducă discontinuități în punctele 0 şi 1, care să afecteze calitatea aproximării semnalului $x(\tau)$ prin analiza multirezoluție. O altă ipoteză care se poate face asupra lui $x(\tau)$ este că el reprezintă restricția la perioada principală a unui semnal periodic de perioadă 1. Această ipoteză conduce la construcția analizelor multirezoluție periodice [76] şi această ipoteză poate să introducă discontinuități în punctele 0 şi 1. O altă ipoteză care se poate face asupra lui $x(\tau)$ este că acest semnal reprezintă restricția semnalului $x_p(\tau)$ la intervalul [0, 1]. Semnalul $x_p(\tau)$ se construieşte pe baza semnalului $x(\tau)$. De fapt el reprezintă pentru $\tau > 1$ simetricul semnalului $x(\tau)$, față de axa de simetrie constituită de verticala dusă prin 1 şi pentru $\tau < 1$, simetricul semnalului $x(\tau)$, față de axa de simetrie constituită de verticala dusă prin 0. Această ipoteză conservă continuitatea în punctele 0 şi 1 pentru semnalul $x(\tau)$, dar nu şi pentru semnalul $x'(\tau)$. Ceea ce se caută de fapt în cazul semnalelor de durată limitată, din $L^2[0, 1]$ sunt funcții de scară şi funcții "wavelet" intrisec definite pe intervalul [0, 1]. În continuare se prezintă o modalitate de construcție a unor astfel de funcții. Se porneşte de la funcția de scară ${}_N\varphi(\tau)$ corespunzătoare funcției "wavelet" ${}_N\psi(\tau)$ introdusă de I. Daubechies. Mulțimea $\left\{ {}_N\varphi_{m,\,k}(\tau)\right\}_{k \in Z}$ este o bază ortonormală a spațiului ${}_NV_m$.

Orice monom τ^{α}, $\alpha \leq N-1$ poate fi descompus în această bază în forma:

$$\tau^{\alpha} = \sum_{k} \left\langle \tau^{\alpha}, \varphi_{m,k}^{(\tau)} \right\rangle \varphi_{m,k}(\tau)$$

Restricția acestui monom la intervalul [0, 1] poate fi exprimată cu relația:

$$\begin{aligned} \tau^{\alpha}\Big|_{[0,1]} = \sum_{k=2N+2}^{0} \left\langle \tau^{\alpha}, \varphi_{m,k}^{(\tau)} \right\rangle \varphi_{m,k}(\tau)\Big|_{[0,1]} + \sum_{k=1}^{2^m-2N} \left\langle \tau^{\alpha}, \varphi_{m,k}^{(\tau)} \right\rangle \varphi_{m,k}(\tau)\Big|_{[0,1]} + \\ + \sum_{k=2^m-2N+1}^{2^m-1} \left\langle \tau^{\alpha}, \varphi_{m,k}(\tau) \right\rangle \varphi_{m,k}(\tau)\Big|_{[0,1]} \end{aligned} \tag{380}$$

Cu notațiile:

$$\tau_{m,L}^{\alpha} = 2^{m\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=-2N+2}^{0} \left\langle \tau^{\alpha}, \varphi_{m,k}(\tau) \right\rangle \varphi_{m,k}(\tau)\Big|_{[0,1]}$$

$$\tau_{m,R}^{\alpha} = 2^{m\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=2^m-2N+1}^{2^m-1} \left\langle \tau^{\alpha}, \varphi_{m,k}(\tau) \right\rangle \varphi_{m,k}(\tau)\Big|_{[0,1]}$$

relația (380) devine:

$$2^{\frac{m}{2}} \left(2^m \tau\right)^{\alpha}\Big|_{[0,1]} = \tau_{m,L}^{\alpha}\, 2^{m\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=1}^{2^m-2N} \left\langle \tau^{\alpha}, \varphi_{m,k}(\tau) \right\rangle \varphi_{m,k}(\tau)\Big|_{[0,1]} + \tau_{m,R}^{\alpha}$$

Indicele m nu trebuie ales superior valorii m_o pentru care:

$$1 \notin \left\{ \tau_{m_o,L}^{\alpha} \right\} \cap [0,1]$$

$$0 \notin \left\{ \tau_{m_o,S}^{\alpha} \right\} \cap [0,1]$$

Se consideră spațiile ${}_rV_m$, $m \geq m_o$:

$$ {}_rV_m = \overline{\left\{\tau_{m,\,L}^{\alpha}\right\}_{\alpha \le N-1}} \cup \overline{\left\{\varphi_{m,\,k}\right\}_{k = 1,\,2^m-2N}} \cup \overline{\left\{\tau_{m,\,R}^{\alpha}\right\}_{\alpha \le N-1}} $$

Fiecare element al unui astfel de spațiu este o combinație liniară de funcții din mulțimile: $\left\{\tau_{m,\,L}^{\alpha}\right\}_{\alpha \le N-1}$, $\left\{\tau_{m,\,R}^{\alpha}\right\}_{\alpha \le N-1}$, $\left\{\varphi_{m,\,k}\Big|_{[0,\,1]}\right\}_{k = \overline{1,\,2^m-2N}}$.

Nu este greu să se găsească o bază ortonormală a spațiului ${}_rV_m$. Mulțimile $\left\{\tau_{m,\,L}^{\alpha}\right\}_{\alpha \le N-1}$, $\left\{\tau_{m,\,R}^{\alpha}\right\}_{\alpha \le N-1}$ și $\left\{\varphi_{m,\,k}\Big|_{[0,\,1]}\right\}_{k = \overline{1,\,2^m-2N}}$ mutual ortogonale și toate elementele lor sunt liniar independente. Nu mai rămâne decât să se ortogonalizeze funcțiile $\tau_{m,\,L}^{\alpha}$ și $\tau_{m,\,R}^{\alpha}$.

Mulțimea $\left\{{}_rV_m\right\}_{m \ge m_o}$ este o analiză multirezoluție a lui $L^2[0,1]$. Complementele ortogonale ale spațiilor ${}_rV_m$ în spațiile ${}_rV_{m-1}$ sunt spațiile ${}_rW_m$, generate de funcțiile "wavelet" pe interval corespunzătoare.

Amănunte despre funcțiile "wavelet" pe interval pot fi găsite în [86], [87], [83].

D. În toate tipurile de analiză multirezoluție descrise până în prezent au fost folosite produsele scalare definite pe $L^2\left(R^n\right)$ sau $l^2\left(Z^n\right)$. Pot fi folosite însă și produse scalare ponderate. Dacă $w(\tau)$ este o funcție local integrabilă pozitivă atunci produsul scalar ponderat de această funcție este:

$$ \left\langle f,\, g\right\rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\, f(\tau)\, g^*(\tau)\, d\tau \qquad (381) $$

Trebuie remarcat asemănarea unui astfel de produs scalar cu reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă:

$$ TF_x^{STFT}(t,\,\omega) = \left\langle x(\tau),\, e^{j\,\omega\,\tau}\right\rangle_{w^{\vee}(\cdot\,,\,-t)} $$

Definiția analizei multirezoluție ponderată este, conform [132], următoarea:

Mulțimea $\left\{V_m\right\}_{m \in Z}$ este o analiză multirezoluție ponderată a lui $L^2(R)$ dacă elementele sale au următoarele proprietăți:

1. $V_m \subset V_{m+1}$, $(\forall)\, m \in Z$

2. $\overline{\bigcup_{m \in Z} V_m} = L^2(R)$

3. $\bigcap_{m \in Z} V_m = \{0\}$

4. Există funcții de scară $\varphi_{m,k}$ astfel încât mulțimea $\left\{\varphi_{m,k}\right\}_{k \in Z}$ să fie o bază Riesz a spațiului V_m.

Ultima proprietate implică faptul că pentru fiecare funcție de scară $\varphi_{m,k}(\tau)$ există un set de coeficienți $\left\{m_{o\ m,k,l}\right\}$ astfel încât să fie satisfăcută o relație de forma:

$$\varphi_{m,k}(\tau) = \sum_l m_{o\ m,k,l}\ \varphi_{m+1,\ 2k+l}(\tau) \tag{382}$$

Spre deosebire de cazul analizelor multirezoluție neponderate, funcțiile de scară $\varphi_{m,k}(\tau)$ nu se mai obțin prin translatarea şi scalarea unei funcții unice. Pentru fiecare funcție $\varphi_{m,k}(\tau)$ există o mulțime specifică de coeficienți $\left\{m_{o\ m,k,l}\right\}$. Se poate construi şi analiza multirezoluție ponderată duală. Ea este compusă din spațiile $\widetilde{V}_m$ generate de funcțiile de scară duale $\widetilde{\varphi}_{m,k}$ care sunt biortogonale în raport cu funcțiile $\varphi_{m,k}$:

$$\left\langle \varphi_{m,k},\ \widetilde{\varphi}_{m,k'} \right\rangle_w = \delta[k - k'] \tag{383}$$

Funcțiile de scară duale satisfac relații de tipul (382), în care însă intervin coeficienți de forma $\widetilde{m}_{o\ m,k,l}$. Este valabilă relația:

$$m_{o\ m,k,l} = \left\langle \varphi_{m,k},\ \widetilde{\varphi}_{m+1,\ 2k+l} \right\rangle_w$$

Spațiile W_m vor fi complementele spațiilor V_m în spațiile V_{m+1} şi vor fi generate de bazele Riesz $\left\{\psi_{m,k}\right\}_{k \in Z}$.

Elementele acestor baze se pot exprima în forma:

$$\psi_{m,k} = \sum_{l} m1_{m,k,l}\, \varphi_{m+1,\,2k+l} \tag{384}$$

Spațiile $\tilde{W}_m$ vor fi complementele spațiilor $\tilde{V}_m$ în spațiile $\tilde{V}_{m+1}$ și vor fi generate de bazele Riesz $\left\{\tilde{\psi}_{m,k}\right\}_{k\in Z}$. Elementele acestor baze se pot exprima în forma:

$$\tilde{\psi}_{m,k} = \sum_{l} \tilde{m}1_{m,k,l}\, \tilde{\varphi}_{m+1,\,2k+l} \tag{385}$$

Funcțiile "wavelet" duale vor fi biortogonale în raport cu funcțiile "wavelet":

$$\left\langle \psi_{m,k},\, \tilde{\psi}_{m',k'} \right\rangle = \delta[k-k']\ \delta[m-m'] \tag{386}$$

Exemple de astfel de analize multirezoluție sunt prezentate în [132].

E. Analizele multirezoluție discutate până aici aproximau semnalul $x(\tau)$ prin proiecția sa pe un anumit subspațiu, V_m:

$$x_m(\tau) = \sum_{k} \left\langle x(\tau),\, \varphi_{m,k}(\tau) \right\rangle \varphi_{m,k}(\tau)$$

Această descompunere este foarte utilă în studiul operatorilor liniari, definiți pe V_m. Fie L un astfel de operator. Se constată că:

$$L\left\{x_m\right\}(\tau) = \sum_{k} \left\langle x(\tau),\, \varphi_{m,k}(\tau) \right\rangle L\left\{\varphi_{m,k}\right\}(\tau)$$

Deci, pentru a cunoaşte efectul aplicării operatorului L semnalului $x_m(\tau)$ este suficient să se cunoască efectul aplicării operatorului L funcțiilor $\varphi_{m,k}(\tau)$.

În consecință se poate afirma că analizele multirezoluție prezentate sunt utile la studiul operatorilor liniari. Din păcate acest tip de analiză nu este la fel de utilă pentru studiul operatorilor neliniari. De aceea s-a încercat generalizarea noțiunii de analiză multirezoluție în scopul obținerii unei noțiuni noi, mai utilă la studiul operatorilor neliniari. Această noțiune nouă a fost numită analiză multirezoluție neliniară. Exemple de astfel de analize multirezoluție sunt prezentate în [24]. O altă abordare a analizelor multirezoluție neliniare este prezentată în [36]. În această lucrare ideea este să se înlocuiască operatorii de proiecție, care în cazul analizelor multirezoluție tradiționale sunt liniari cu operatori neliniari.

Este vorba despre operatori de "retracție" pe mulțimi convexe.

Definiție. Operatorul continuu $R_m : H \to C_m$ (H este un spațiu Hilbert închis iar C_m este o mulțime convexă) este numit "retracție" pe C_m dacă C_m este mulțimea punctelor fixe ale operatorului R_m :

$$C_m = \left\{ y \in H \,\middle|\, R_m(y) = y \right\} \tag{387}$$

Cu ajutorul acestor operatori poate fi definită noțiunea de analiză multirezoluție convexă.

Definiție: O analiză multirezoluție convexă a lui H este o secvență de retracții pe mulțimi convexe închise $\{C_m\}_{m \in Z}$, submulțimi ale lui H, $\{R_m\}_{m \in Z}$ cu proprietățile:

1. $(\forall)\ m \in Z, \quad C_m \subset C_{m+1}$

2. $\overline{\lim_{m \to \infty} C_m} = H$

3. $C = \lim_{m \to \infty} C_m \neq \varnothing$ (388)

4. $(\forall)\ (m,x) \in Z \times H \quad \|x - R_{m+1}x\| \leq \|x - R_m x\|$

5. $(\forall)\ (x,m) \in H \times Z \quad R_m x = R_m \circ R_{m+1} x$

Semnalul:

$$x_m = R_m x$$

este o aproximație a semnalului x de rezoluție m. În acelaşi timp semnalul x_m poate fi privit ca şi proiecția semnalului x_{m+1}:

$$x_m = R_m(x_{m+1})$$

De aceea analiza multirezoluție convexă poate fi implementată ca şi o bancă de filtre neliniare. Filtrând semnalul x_{m+1} cu filtrul descris de operatorul R_m se obține semnalul x_m. Filtrând acest semnal cu filtrul descris de operatorul R_{m-1} se obține semnalul x_{m-1} şi aşa mai departe. Semnalul x_m este o aproximare a lui x de rezoluție inferioară în compara•ie cu aproximarea sa prin semnalul x_{m+1} deoarece conține mai puțină informație despre semnalul x decât semnalul x_{m+1}.

Semnificația fizică a pierderii de informație de la rezoluția m + 1 la rezoluția m, depinde de alegerea operatorului de retracție R_m.

Un exemplu de operator de retracție este cel definit recurent în relația următoare:

$$\forall\ \alpha \in R \quad R_m\left(\alpha\, x\ +\ (1-\alpha)x_m\right)\ =\ x_m \tag{389}$$

F. O generalizare simplă dar foarte utilă a noțiunilor de funcție "wavelet" respectiv de analiză multirezoluție apare în cazul pachetelor de funcții "wavelet". Pentru a introduce această noțiune este utilă folosirea următoarei notații:

$$m_e(\omega)\ =\ m_o^e(\omega)\ \ m_1^{1-e}(\omega)\,,\ \ e\ =\ 0{,}1$$

Observația fundamentală care stă la baza construcției pachetelor de funcții "wavelet" este așa numitul artificiu de împărțire.

Se presupune că mulțimea de funcții $\left\{f(\tau-k)\right\}_{k\in Z}$ este o bază Riesz a spațiului Hilbert S. Atunci funcțiile:

$$f_k^o(\tau)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,f^o\left(\frac{\tau}{2}-k\right)\quad \text{şi}\quad f_k^1(\tau)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,f^1\left(\frac{\tau}{2}-k\right),\ \ k\ \in\ Z \tag{390}$$

unde:

$$F\left\{f^e\right\}(\omega)\ =\ m_e\left(\frac{\omega}{2}\right)\ F\left\{f\right\}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{391}$$

constituie de asemenea o bază Riesz a spațiului S:

$$\left\{f_k^o(\tau),\, f_k^1(\tau)\right\}_{k\in Z}$$

O analiză multirezoluție clasică este obținută împărțind spațiile V_m, folosind artificiul descris mai sus în spațiile V_{m-1} şi W_{m-1} şi apoi făcând la fel, într-un mod recursiv, pentru spațiul V_{m-1}.

Pachetele de funcții "wavelet" sunt funcțiile elemente ale bazelor Riesz care se obțin dacă se folosește artificiul de împărțire şi pentru spațiile W_m. Pornind de la spațiul V_m ,se obțin, după aplicarea de L ori a artificiului de împărțire, funcțiile (elemente ale unor baze Riesz):

$$\psi^L_{e_1,\,\ldots e_L;\,m,\,k}\ (\tau)=\ 2^{\frac{(m-L)}{2}}\,\psi^L_{e_1,\,\ldots e_L}\left(2^{m-L}\tau-k\right) \tag{392}$$

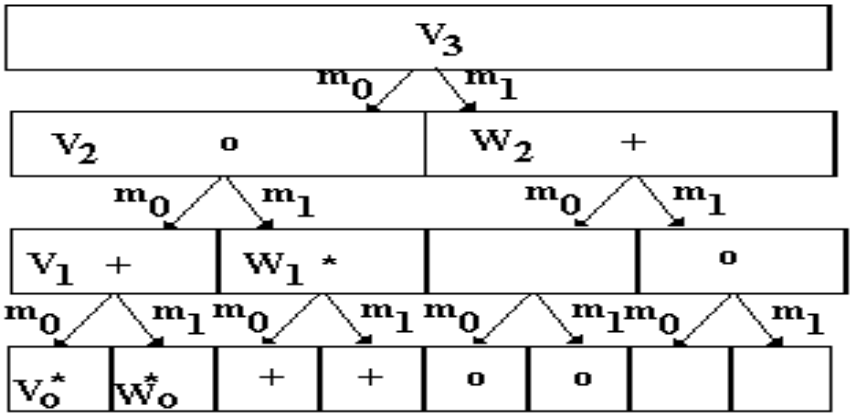


Figura 1.7.1.2.9. Schemă pentru generarea pachetelor de funcții "wavelet".

cu:

$$F\left\{\psi^{L}_{e_1,\,\ldots e_L}\right\}(\omega) = \prod_{l=1}^{L} m_{e_l}\left(2^{-l}\omega\right) F\{\varphi\}\left(2^{-L}\omega\right) \qquad (393)$$

Astfel, după L împărțiri, se obțin 2^L funcții de bază şi translatatele lor cu întregi multipli de 2^{L-m} ca şi elemente ale bazei Riesz a spațiului V_m. Legătura dintre pachetele de funcții "wavelet" şi funcțiile de scară respectiv funcțiile "wavelet" corespunzătoare este:

$$\varphi(\tau) = \psi^{L}_{o,\,\ldots,\,o}(\tau) \text{ şi } \psi(\tau) = \psi^{L}_{1,\,o,\,\ldots,\,o}(\tau)$$

De fapt nu este necesar să se împartă fiecare subspațiu pentru fiecare valoare a lui *m*. În figura 1.7.1.2.9 se prezintă o modalitate de împărțire a spațiului V_3 corespunzătoare schemei care generează pachete de funcții "wavelet". În figură sunt notate cu * spațiile care aparțin unei analize multirezoluție:

$$V_3 = V_o \oplus W_2 \oplus W_1 \oplus W_o$$

Cu ° s-au notat spațiile care pot participa la construcția unui pachet de funcții "wavelet". Baza Riesz a lui V_o corespunzătoare pachetului de funcții "wavelet" ales în acest exemplu este $\left\{\psi^{1}_{o}(4\tau-k)\,,\ \psi^{2}_{11}(2\tau-k)\,,\ \psi^{3}_{1,\,o,\,o}(\tau-k)\,,\ \psi_{1,\,o,\,1}(\tau-k)\right\}_{k\in Z}$.

Un alt pachet de funcții "wavelet" poate fi construit dacă se aleg funcțiile notate cu + în figura 1.7.1.2.9. Acestui nou pachet de funcții "wavelet" îi corespunde următoarea bază Riesz a lui V_3:

$$\left\{\psi^{1}_{1}(4\tau-k)\,,\ \psi^{2}_{1,o}(2\tau-k)\,,\ \psi^{3}_{o,\,1,\,o}(\tau-k)\,,\ \psi^{3}_{o,\,1,\,1}(\tau-k)\right\}_{k\in Z}$$

Pentru funcțiile duale trebuie aplicată o procedura similară. Transformările "wavelet"

discrete directă şi inversă, corespunzătoare primului exemplu de pachet de funcții "wavelet" dat mai sus sunt prezentate în figura 2.7.1.2.9.

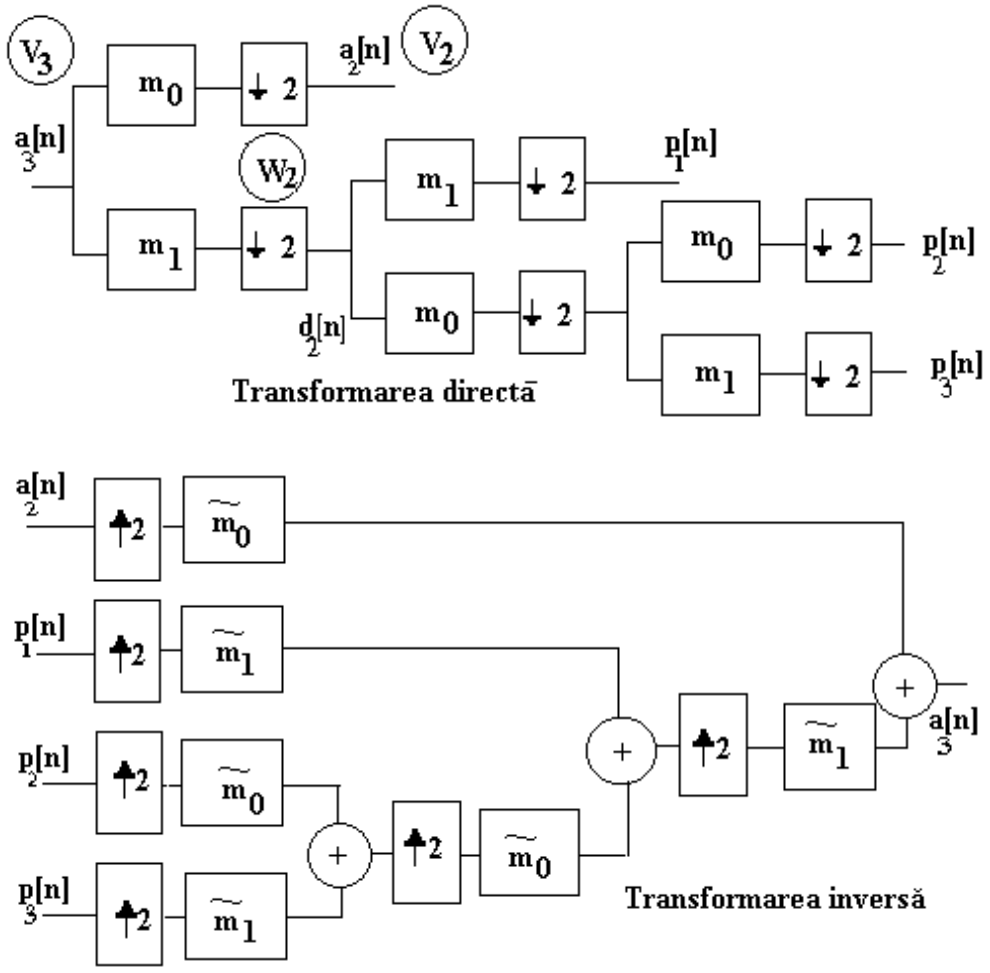


Figura 2.7.1.2.9. Transformările "wavelet" discrete, directă şi inversă corespunzătoare primului exemplu de pachet de funcții "wavelet".

Principalul avantaj al pachetelor de funcții "wavelet" este că avem mult mai multă liberate în alegerea bazei în care să descompunem semnalul pe care dorim să-l analizăm. Există criterii de alegere a bazei în acord cu semnalul de analizat. M. Wikerhauser a propus un astfel de criteriu. Procedura introdusă de el se numeşte "alegerea celei mai bune baze".O prezentare exhaustivă a acestui concept este făcută în [149].

7.1.2.10 PACHETE DE FUNCŢII "WAVELET"

În continuare se dezvoltă conceptul introdus la sfârşitul paragrafului anterior prezentându-se diferite modalităţi de construcţie a unor baze ale lui $L^2(R)$. În primul rând se observă că şirul de simboluri din relaţia (392) $e_1 ... e_L$ reprezintă exprimarea în binar a unui anumit număr. Dacă acest număr se notează cu *n* atunci relaţia (392) devine:

$$\psi_{n,m,k}(\tau) = 2^{\frac{(m-L)}{2}} \psi_n\left(2^{m-L}\tau - k\right), \quad n = n[L] \tag{394}$$

E clar că numărul *n* depinde de L.

Modul de generare al acestor funcţii este prezentat în figura 1.7.1.2.10.

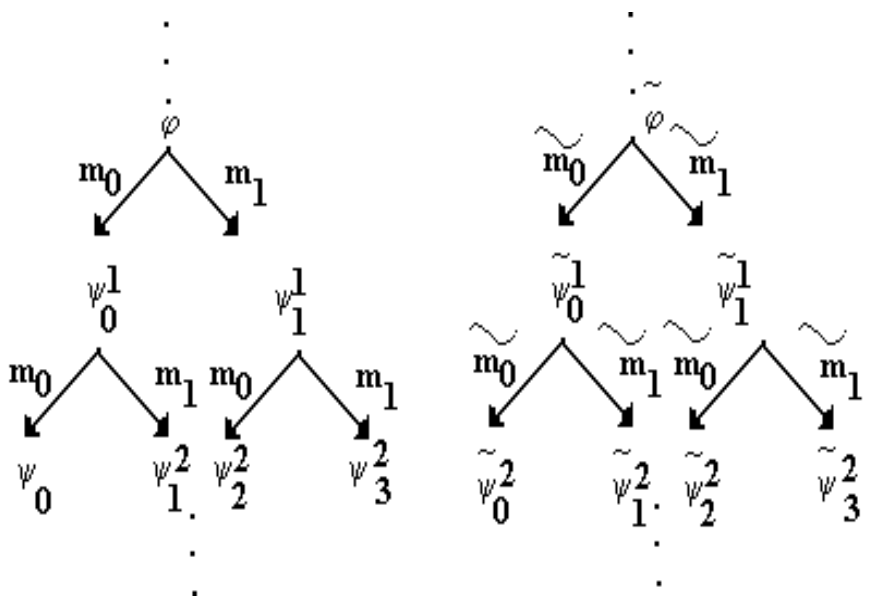


Figura 1.7.1.2.10 Schema de generare a unui pachet de funcţii "wavelet" (m = 0)

Se observă că pentru o valoare fixată a lui L (de exemplu L = 2) elementele cu indici pari $\left(\psi_0^2, \psi_2^2\right)$ sunt generate cu ajutorul filtrului m_0 iar elementele cu indici impari $\left(\psi_1^2, \psi_3^2\right)$ sunt generate cu ajutorul filtrului m_1.

De aceea sunt valabile relaţiile:

$$\psi_{2n,\,m}(\tau) \;=\; \left(m_o \downarrow\right) \psi_{n,\,m}(\tau) \;=\; \sqrt{2} \sum_k m_o[k]\; \psi_{n,\,m}(2\tau - k) \tag{395}$$

$$\psi_{2n+1,\,m}(\tau) \;=\; \left(m_1 \downarrow\right) \psi_{n,\,m}(\tau) \;=\; \sqrt{2} \sum_l m_1[l]\; \psi_{n,\,m}(2\tau - l) \tag{396}$$

Relații identice pot fi scrise şi pentru funcțiile duale:

$$\tilde{\psi}_{2n,\,m}(\tau) \;=\; \left(\tilde{m}_o \downarrow\right) \tilde{\psi}_{n,\,m}(\tau) \;=\; \sqrt{2} \sum_l m_o[k]\; \tilde{\psi}_{n,\,m}(2\tau - l) \tag{397}$$

$$\tilde{\psi}_{2n+1,\,m}(\tau) \;=\; \left(\tilde{m}_1 \downarrow\right) \tilde{\psi}_{n,\,m}(\tau) \;=\; \sqrt{2} \sum_l m_1[l]\; \tilde{\psi}_{n,\,m}(2\tau - l) \tag{398}$$

Schema de generare a pachetului de funcții "wavelet" duale este prezentată în partea dreaptă a figurii 1.7.1.2.10.

Folosind notațiile:

$$\begin{cases} \psi_{n,\,m,\,k}(\tau) \;=\; \psi_{n,\,m}(2\tau - k) \\ \tilde{\psi}_{n,\,m,\,k}(\tau) \;=\; \tilde{\psi}_{n,\,m}(2\tau - k) \end{cases} \tag{399}$$

se poate demonstra biortogonalitatea acestor funcții:

$$\left\langle \psi_{n,\,m}(\tau - k)\,,\; \tilde{\psi}_{n',\,m}(\tau - l) \right\rangle \;=\; \delta[n - n']\; \delta[k - l] \tag{400}$$

Fie $\Lambda_{n,m}$ spațiul Hilbert generat de mulțimea $\left\{\psi_{n,\,m}(\tau - k)\right\}_{k \in Z}$:

$$\Lambda_{n,\,m} \;=\; \left\{ x^L_{n,\,m}(\tau) \;= \sum_k c\,[k]\, \psi^L_{n,\,m}(\tau - k) \right\} \;\subset\; L^2(R) \tag{401}$$

Se observă că:

$$\Lambda^o_{o,\,o} \;=\; V_o$$

Datorită ecuațiilor (395) şi (396) se poate scrie:

$$\Lambda_{2n,\,m} = \left(m_o \downarrow\right) \Lambda_{n,\,m} \;\; ; \qquad \Lambda_{2n+1,\,m} = \left(m_1 \downarrow\right) \Lambda_{n,\,m} \tag{402}$$

Se poate demonstra că mulţimea $\left\{\psi_{n,\,m}(\tau - k)\right\}_{k \in Z}$ este o bază Riesz a spaţiului $\Lambda_{n,m}$.

Dacă filtrele cu răspuns la impuls $m_o[n]$ şi $m_1[n]$ sunt filtre în cuadratură ortogonale (cele care generează baze ortogonale de funcţii de scară şi de funcţii "wavelet") atunci mulţimea $\left\{\psi_{n,\,m}(\tau - k)\right\}_{k \in Z}$ este o bază ortonormală a spaţiului $\Lambda_{n,m}$.

Teorema 1.7.1.2.10 Prin concatenarea bazelor spaţiilor $\Lambda_{n,m}$, $n \geq 0$ se obţine o bază a spaţiului $L^2(R)$.

În continuare se demonstrează această afirmaţie.

Pe baza proprietăţii de reconstrucţie perfectă a bazelor biortogonale ale spaţiului $\Lambda_{n,m}$ se poate scrie:

$$\begin{aligned}\psi_{n,\,m}(\tau + k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in Z} \tilde{m}_o^*[2l - k]\, \psi_{2n,\,m}\left(\frac{\tau}{2} + l\right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in Z} \tilde{m}_1^*[2l - k]\, \psi_{2n+1,\,m}\left(\frac{\tau}{2} + l\right)\end{aligned} \tag{403}$$

Fie $x_{n,m}(\tau)$ un element al spaţiului $\Lambda_{n,m}$. El se poate descompune în baza $\left\{\psi_{n,\,m}(\tau - k)\right\}_{k \in Z}$ a acestui spaţiu, în forma:

$$x_{n,\,m}(\tau) = \sum_{k \in Z} \lambda_n^*[k]\, \psi_{n,\,m}(\tau + k)$$

sau pe baza relaţiei (403):

$$\begin{aligned}x_{n,\,m}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l \left(\sum_k \tilde{m}_o^*[2l - k] \lambda_n^*[k]\right) \psi_{2n,m}\left(\frac{\tau}{2} + l\right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l \left(\sum_k \tilde{m}_1^*[2l - k]\, \lambda_n^*[k]\right) \psi_{2n+1,\,m}\left(\frac{\tau}{2} + l\right) = \\ &= \sum_l \left(\left(\tilde{m}_o \downarrow\right) \lambda_n\right)^*[l] \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{2n,\,m}\left(\frac{\tau}{2} + l\right) + \sum_l \left(\left(\tilde{m}_1 \downarrow\right) \lambda_n\right)^*[l] \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{2n+1,m}\left(\frac{\tau}{2} + l\right)\end{aligned} \tag{404}$$

O formă echivalentă pentru ultima relație este:

$$x_{n,\,m}(\tau) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\, y_{2n,\,m}\left(\frac{\tau}{2}\right) \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\, z_{2n+1,\,m}\left(\frac{\tau}{2}\right) \tag{405}$$

unde $y_{2n,\,m} \in \Lambda_{2n,\,m}$ și $z_{2n+1,\,m} \in \Lambda_{2n+1,\,m}$
Fie:

$$(\sigma x)(\tau) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\, x\left(\frac{\tau}{2}\right) \tag{406}$$

și spațiul $(\sigma)\Lambda_{n,\,m}$ definit prin:

$$(\sigma)\,\Lambda_{n,\,m} \;=\; \left\{\sigma x\,,\;\; x \;\in\; \Lambda_{n,\,m}\right\} \tag{407}$$

Pe baza ecuației (405) se poate scrie:

$$\Lambda_{n,\,m} \;=\; \left(\sigma\left(m_o\downarrow\right)\right)\Lambda_{n,\,m} + \left(\sigma\left(m_1\downarrow\right)\right)\Lambda_{n,\,m} \;=\; (\sigma)\,\Lambda_{2n,\,m} + (\sigma)\,\Lambda_{2n+1,\,m} \tag{408}$$

Ultima relație poate fi pusă, prin recurență în forma:

$$\Lambda_{o,\,m} = (\sigma)\Lambda_{o,\,m} + (\sigma)\Lambda_{1,\,m} = \ldots = (\sigma)^k\,\Lambda_{o,\,m} + (\sigma)^k\,\Lambda_{1,\,m} + \ldots + (\sigma)^k\,\Lambda_{2^k-1,\,m} \tag{409}$$

În general:

$$\Lambda_{n,\,m} \;=\; (\sigma)^k\,\Lambda_{2^k n,\,m} \;+\; \ldots \;+\; (\sigma)^k\,\Lambda_{2^k(n+1)-1,\,m}\,, \qquad n \geq 0,\;\; k \geq 0 \tag{410}$$

La fel, pentru *k* negativ avem:

$$(\sigma)^k\,\Lambda_{n,\,m} \;=\; \Lambda_{2^{-k}n,\,m} \;+\; \ldots \;+\; \Lambda_{2^{-k}(n+1)-1,\,m}\,, \qquad n \geq 0,\;\; k \leq 0 \tag{411}$$

Spațiile, elemente ale descompunerilor (410), (411) acoperă spațiul $L^2(R)$ atunci când se parcurge mulțimea Z iar *n* parcurge mulțimea Z^+. Elementele mulțimii $\left\{\psi_{n,\,m}(\tau - k),\; k \in Z\,,\; n \geq 0\right\}$ sunt ortonormale. Combinațiile lor liniare acoperă

spaţiul $\Lambda_{o,\,m} + \Lambda_{1,\,m} + \ldots$. Dar acest spaţiu conţine spaţiul $(\sigma)^{-k}\,\Lambda_{o,\,m}$ pentru fiecare valoare a lui *k*. Avem:

$$(\sigma)^{-k}\,\Lambda_{o,\,m} = (\sigma)^{-k} V_o = V_{-k}$$

Cum (pe baza unei proprietăţi a analizei multirezoluţie $\{V_m\}_{m \in Z}$):

$$V_{-k} \xrightarrow[k \to -\infty]{} L^2(R)$$

rezultă că mulţimea considerată este completă. De aceea se poate afirma că această mulţime reprezintă o bază Riesz a lui $L^2(R)$. Dacă $m_0[n]$ şi $m_1[n]$ sunt răspunsuri la impuls de filtre ortogonale atunci mulţimea considerată este o bază ortonormală a lui $L^2(R)$. Indicele *m* specifică faptul că descompunerea a început de la spaţiul V_m. Având în vedere că descompunerea de spaţii prezentată corespunde unei descompuneri în subbenzi se poate afirma că indicele *n* descrie localizarea în domeniul frecvenţă a funcţiei $\psi_{n,\,m}(\tau)$ (această observaţie este în acord cu afirmaţiile din paragrafele 7.1.2.7 şi 7.1.2.8 referitoare la localizarea în frecvenţă a funcţiilor "wavelet"). În continuare elemetele pachetelor de funcţii "wavelet" vor fi privite ca şi atomi timp-frecvenţă.

În acest scop mulţimea $\left\{\psi_{s\,f\,p} = 2^{-\frac{1}{2}}\,\psi_f\left(2^{-s}\tau - p\right)\right\}_{s \in I_s,\, f \in I_f,\, p \in I_p}$ va fi considerată ca fiind un pachet de funcţii "wavelet". Elementul $\psi_{sfp}(\tau)$ are indicele de scară *s*, indicele de frecvenţă *f* şi indicele de poziţie *p*.

Această construcţie generalizează mulţimea $\{\psi_{n,\,m}(\tau - k)\}_{k \in Z,\ n \in Z,\, n \geq 0}$ prin aceea că apare un nou grad de libertate, datorat variabilei *s*.

Remarcă:

Factorul 2^{-s} are o semnificaţie opusă semnificaţiei factorului 2^m din formula folosită până aici:

$$\psi_{n,\,m} = 2^{\frac{m}{2}}\,\psi\left(2^m \tau - n\right)$$

Indicele *m* avea semnificaţia de rezoluţie iar indicele *s* are semnificaţia de scară. Întru cât în continuare ne referim la atomi timp-frecvenţă este mai potrivit să folosim noţiunea de scară în locul noţiunii de rezoluţie.

Mulțimea $\left\{\psi_{sfp}(\tau),\ p \in Z\right\}$ este, conform rezultatelor precedente, o bază a spațiului $(\sigma)^s \Lambda_f$. Indicele de scară dă o estimare relativă a duratei semnalului $\psi_{sfp}(\tau)$:

$$\sigma_t^2\left(\psi_{sfp}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \left|2^{-s/2}\psi_f\left(2^{-s}\tau - p\right)\right|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2^{-s/2}\tau\right)^2 \left|\psi_f\left(2^{-s}\tau - p\right)\right|^2 d\tau$$

Folosind schimbarea de variabilă:

$$2^{-s}\tau - p = u$$

ultima relație devine:

$$\sigma_t^2\left(\psi_{sfp}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-s/2}\ 2^s\left(u+p\right)^2 \left|\psi_f(u)\right|^2 du =$$

$$= 2^{2s}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u+p\right)^2 \left|\psi_f(u)\right|^2 du$$

sau:

$$\sigma_t\left(\psi_{sfo}(\tau)\right) = 2^s \sigma_t\left(\psi_f(\tau)\right) \tag{412}$$

Dacă:

$$supp\left\{\psi_f(\tau)\right\} = [0,\ R]$$

atunci:

$$supp\left\{\psi_{sfo}(\tau)\right\} = \left[0,\ 2^s R\right]$$

sau ținând seama că *p* este indice de poziție rezultă:

$$supp\left\{\psi_{sfp}(\tau)\right\} = \left[0,\ 2^s\left(R+p\right)\right] \tag{413}$$

Banda efectivă a semnalului $\psi_{sfp}(\tau)$ se ob•ine din:

$$\sigma_\omega^2\left(F\left\{\psi_{sfp}(\tau)\right\}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left|F\left\{2^{-\frac{s}{2}}\psi_f\left(2^{-s}\tau - p\right)\right\}\right|^2 d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 2^s \left|F\left\{\psi_f(\tau)\right\}\right|^2 \left(2^s\omega\right) d\omega = 2^s \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left|F\left\{\psi_f\right\}\left(2^s\omega\right)\right|^2 d\omega$$

Cu substituţia:

$$2^s\omega = u$$

rezultă:

$$\sigma_\omega^2\left(F\left\{\psi_{sfp}(\tau)\right\}\right) = 2^s \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-2s} u^2 \left|F\left\{\psi_f\right\}(u)\right|^2 2^{-s}\, du$$

adică:

$$\sigma_\omega\left(F\left\{\psi_{sfp}(\tau)\right\}\right) = 2^{-s}\sigma_\omega\left(F\left\{\psi_f\right\}\right)$$

Aşadar, dacă:

$$supp\left\{F\left\{\psi_f\right\}(\omega)\right\} = \left[2\pi f,\ 2\pi f + B_\omega\right]$$

atunci:

$$supp\left\{F\left\{\psi_{sfp}\right\}(\omega)\right\} = \left[2^{-s}\cdot 2\pi f,\ 2^{-s}\left(2\pi f + B_\omega\right)\right] \qquad (414)$$

Deci atomul timp-frecvenţă are o localizare în planul timp-frecvenţă descrisă de valorile indicilor s, f şi p. Celula de rezoluţie corespunzătoare acestui atom este un dreptunghi de laturi $\sigma_t\left(\psi_{sfp}\right)$ şi $\sigma_\omega\left(\psi_{sfp}\right)$ al cărui centru (numit centru de energie al semnalului ψ_{sfp}) are o poziţie specificată prin intermediul valorilor indicilor s, f şi p.

În continuare se consideră exemplul pachetelor de funcţii "wavelet" de tip Haar-Walsh. În acest caz:

$$\begin{cases} m_0[n] = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\delta[n] + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\delta[n-1] \\ m_1[n] = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\delta[n] - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\delta[n-1] \\ \psi_0(\tau) = \sigma(\tau) - \sigma(t-1) \end{cases} \qquad (415)$$

Funcţiile $\psi_n(\tau)$, $n \geq 0$ au suportul inclus în intervalul [0, 1]. Fie n un număr cu exprimarea binară:

$$n_o n_1 \ldots n_p n_{p+1} \ldots n_P$$

şi:

$$CG_n[p] = n_p \oplus n_{p+1}$$

unde $\oplus$ reprezintă adunarea modulo 2. CG_n se numeşte codul Gray al numărului n. [114].

De exemplu numărul 5 are exprimarea binară:

$$101$$

Codul Gray al numărului 5 este:

$$111$$

Deci:

$$CG_5 = 7$$

Transformarea care descrie codul Gray este inversabilă. Inversa este dată de:

$$CG_n^{-1}[p] = n_p \oplus n_{p+1} \oplus n_{p+2} \oplus \ldots$$

Suma din membrul drept al ultimei relații este finită, deoarece:

$$n_p = 0 \text{ dacă } n < 2^p$$

Reluând exemplul considerat:

$$CG_7^{-1}[0] = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$CG_7^{-1}[1] = 1 \oplus 1 = 0$$

$$CG_7^{-1}[2] = 1$$

Într-adevăr:

$$CG_7^{-1} = 5$$

Transformarea inversă poate fi calculată şi recursiv:

$$\begin{cases} CG_{2n}^{-1} = \begin{cases} 2\,CG_n^{-1}, & daca \quad CG_n^{-1} \quad este\ par \\ 2\,CG_n^{-1}+1, & daca \quad CG_n^{-1} \quad este\ impar \end{cases} \\ CG_{2n}^{-1} = \begin{cases} 2\,CG_n^{-1}+1, & daca \quad CG_n^{-1} \quad este\ par \\ 2\,CG_n^{-1}, & daca \quad CG_n^{-1} \quad este\ impar \end{cases} \end{cases} \tag{416}$$

Conform relațiilor (395), (396) şi (415) elementele pachetului de funcții "wavelet" ortogonale sunt:

$$\psi_{2n}(\tau) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \psi_n(2\tau) + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \psi_n(2\tau-1)\right) = \psi_n(2\tau) + \psi_n(2\tau-1) \quad (417)$$

$$\psi_{2n+1}(\tau) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \psi_n(2\tau) - \frac{1}{\sqrt{2}}\ \psi_n(2\tau-1)\right) = \psi_n(2\tau) - \psi_n(2\tau-1) \quad (418)$$

Pentru $n = 0$ se obțin:

$$\psi_o(\tau) = \varphi_H(\tau)$$
$$\psi_1(\tau) = \psi_H(\tau)$$

Pentru $n = 1$ se obțin:

$$\psi_2(\tau) = \psi_H(2\tau) + \psi_H(2\tau-1)$$
$$\psi_3(\tau) = \psi_H(2\tau) - \psi_H(2\tau-1)$$

iar pentru $n = 2$:

$$\psi_4(\tau) = \psi_2(2\tau) + \psi_2(2\tau-1)$$
$$\psi_5(\tau) = \psi_2(2\tau) - \psi_2(2\tau-1)$$

Graficele acestor funcții sunt prezentate în figura 2.7.1.2.10.

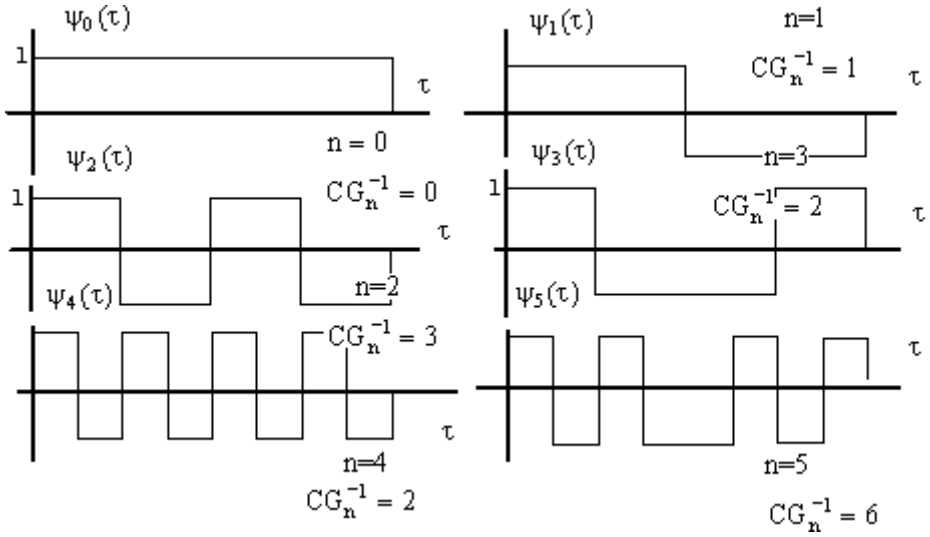


Figura 2.7.1.2.10 Graficele primelor 6 funcții din pachetul de funcții "wavelet" ortogonale din acest exemplu

Se observă că s-au obținut funcțiile Walsh pe intervalul [0, 1], [114]. De aceea pachetul de funcții "wavelet" ortogonale din acest exemplu se numeşte de tip Haar-Walsh.

Analizând figura 2.7.1.2.10 se constată că numărul de treceri prin 0 ale funcției $\psi_n(\tau)$ este egal cu CG_n^{-1}.

De fapt această afirmație este adevărată pentru orice număr natural *n*. Într-adevăr, fie *n*' numărul de treceri prin 0 ale funcției $\psi_n(\tau)$ în intervalul (0, 1). Se presupune că este adevărată egalitatea:

$$n' = CG_n^{-1} \tag{419}$$

Dacă *n*' este impar $\psi_n(0)$ şi $\psi_n(1)$ au semne contrare. Funcția $\psi_{2n}(\tau)$ are $2n'+1$ treceri prin 0 în intervalul (0, 1). Funcția $\psi_{2n+1}(\tau)$ are $2n'$ treceri prin 0 în intervalul (0, 1). Relația (416) arată că şi CG_n^{-1} are aceste proprietăți. Dacă *n*' este impar atunci $\psi_n(0)$ şi $\psi_n(1)$ au acelaşi semn. Funcția $\psi_{2n}(\tau)$ are $2n'$ treceri prin 0 în intervalul (0, 1). Funcția $\psi_{2n+1}(\tau)$ are $2n'+1$ treceri prin 0 în intervalul (0, 1). Şi în acest caz ipoteza (419) este în acord cu relația (416). Dar frecvența unui semnal cosinusoidal este egală cu jumătate din numărul de treceri prin 0 al acestui semnal în intervalul [0, 2π]. De aceea putem afirma că frecvența nominală a funcției $\psi_n(\tau)$ din exemplul nostru este $\frac{n'}{2}$. Deci funcția $\psi_n(\tau)$ din pachetul de funcții "wavelet" ortogonale de tip Haar-Walsh are frecvența nominală $\frac{1}{2} CG_n^{-1}$. Elementul $\psi_{n\,k\,p}(\tau) = 2^{-\frac{k}{2}}\,\psi_n\left(2^{-k}\tau - p\right)$ are ca şi suport temporal intervalul $\left[2^k p,\ 2^k(p+1)\right]$, a cărui lungime este 2^k.

Această observație finalizează primul exemplu de pachet de funcții "wavelet" ortogonale.

În continuare se defineşte pachetul de funcții "wavelet", $\tilde{\psi}_{sfr}(\tau)$. În acest scop se defineşte intervalul diadic de numere reale:

$$I_{k\,n} = \left[\frac{n}{2^k},\ \frac{n+1}{2^k}\right) \tag{420}$$

Există o corespondență naturală între intervalele diadice şi subspațiile lui $L^2(R)$:

$$I_{sf} \leftrightarrow (\sigma)^s \Lambda_f \tag{421}$$

În legătură cu această corespondenţă se poate demonstra următorul rezultat.
Lema 1.7.1.2.10. Dacă intervalele diadice $I_{s'f'}$ şi I_{sf} sunt disjuncte sau dacă $I_{s'f'} = I_{sf}$ dar $p' \neq p$ atunci:

$$\left\langle \psi_{sfp},\ \tilde{\psi}_{s'f'p'} \right\rangle = 0$$

Demonstraţie. Dacă $s = s'$ şi $f = f'$ atunci:

$$I_{s'f'} = I_{sf}$$

În acest caz:

$$\left\langle \psi_{sfp}, \tilde{\psi}_{s'f'p'} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-s/2} \psi_f\left(2^{-s}\tau - p\right) 2^{-s'/2} \tilde{\psi}^*_{f'}\left(2^{-s'}\tau - p'\right) d\tau =$$

$$= 2^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_f\left(2^{-s}\tau - p\right) \tilde{\psi}^*_f\left(2^{-s}\tau - p'\right) d\tau$$

Cu schimbarea de variabilă:

$$2^{-s}\tau = u$$

ultima relaţie devine:

$$\left\langle \psi_{sfp}, \tilde{\psi}_{s'f'p'} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_f(u-p)\tilde{\psi}^*_f(u-p')du = \left\langle \psi_f(u-p), \tilde{\psi}_f(u-p') \right\rangle$$

sau pe baza relaţiei (400):

$$\left\langle \psi_{sfp}, \tilde{\psi}_{s'f'p'} \right\rangle = \delta[f-f']\,\delta[p-p'] = \delta[p-p'] = 0,\ p \neq p' \qquad (422)$$

Dacă $s = s'$ şi $f \neq f'$ atunci:

$$\left\langle \psi_{sfp}, \tilde{\psi}_{s'f'p'} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_f(u-p)\,\tilde{\psi}_{f'}(u-p')\,du = \left\langle \psi_f(u-p),\ \tilde{\psi}_{f'}(u-p') \right\rangle$$

sau pe baza relaţiei (400):

$$\left\langle \psi_{sfp}, \tilde{\psi}_{s'f'p'} \right\rangle = \delta[f - f']\,\delta[p - p'] = 0,\ f \neq f' \tag{423}$$

Dacă $s' < s$ fie:

$$r = s - s' > 0$$

Atunci:

$$\psi_{sfp} \in (\sigma)^s \Lambda_f \ ; \quad \tilde{\psi}_{s'f'p'} = (\sigma)^{s'} \tilde{\Lambda}_{f'} = (\sigma)^s (\sigma)^{-r} \tilde{\Lambda}_{f'}$$

Dar:

$$(\sigma)^s (\sigma)^{-r} \tilde{\Lambda}_{f'} = \bigcup_{n = 2^r f'}^{2^r (f' + 1) - 1} (\sigma)^s \tilde{\Lambda}_n \tag{424}$$

Dacă intervalele diadice $I_{s'f'}$ și I_{sf} sunt disjuncte, atunci fiecare termen al reuniunii din membrul drept al ultimei relații este un spațiu ortogonal pe spațiul Λ_f :

$$2^r f' \leq n \left\langle 2^r (f' + 1) \right\rangle, \ \tilde{\Lambda}_n \perp \Lambda_f$$

De aceea se poate scrie:

$$(\sigma)^s (\sigma)^{-r} \tilde{\Lambda}_{f'} \perp (\sigma)^s \Lambda_f$$

adică:

$$\left\langle \psi_{sfp}, \tilde{\psi}_{s'f'p'} \right\rangle = 0$$

Lema 1.7.1.2.10 este aşadar demonstrată.

Dacă:

$$s = s', f = f' \text{ şi } p = p'$$

atunci:

$$\left\langle \psi_{sfp}, \tilde{\psi}_{s'f'p'} \right\rangle = \left\langle \psi_f (u - p), \tilde{\psi}_f (u - p') \right\rangle = 1 \tag{425}$$

În consecință $\left\{ \psi_{sfp} \right\}_{s \in I_s, f \in I_f, p \in I_p}$ şi $\left\{ \tilde{\psi}_{s'f'p'} \right\}_{s' \in I_s, f' \in I_f, p' \in I_p}$ sunt biortogonale.

În continuare se "rafinează" descompunerea:

$$L^2 = \bigcup_n \Lambda_n$$

admiţând că şi indicele *s* variază.

Fie I o acoperire diadică realizată cu intervale $I_{s\,k}$,disjuncte, a mulţimii R^+. Se poate formula acum următoarea teoremă.

Teorema 2.7.1.2.10 Dacă I este o acoperire diadică realizată cu intervale disjuncte a lui R^+ atunci există un pachet de funcţii "wavelet" $\left\{\psi_{sfp},\ I_{sf} \in I,\ p \in Z\right\}$ care formează o bază a spaţiului $L^2(R)$.

Demonstraţie. Mulţimea $\left\{\psi_{sfp},\ p \in Z\right\}$ este o bază pentru spaţiul $(\sigma)^s \Lambda_f$. Două astfel de spaţii sunt disjuncte dacă intervalele diadice care le corespund sunt disjuncte. De aceea este suficient să se demonstreze că mulţimea $\bigcup_s \bigcup_f \left\{(\sigma)^s \Lambda_f,\ I_{sf} \in I\right\}$ este densă în $L^2(R)$.

Se consideră pentru început cazul $s \le 0$ pentru toate intervalele $I_{s,\,f}$ din I.
În acest caz fiecare spaţiu $I_{s.\,f}$ corespunde spaţiului:

$$(\sigma)^s \Lambda_f = \bigcup_{n\,=\,2^{-s} f}^{2^{-s}(f+1)\,-1} \Lambda_n$$

şi indicii acestor subspaţii sunt tocmai întregii din intervalul $I_{s,\,f}$.

Deoarece:

$$\bigcup_s \bigcup_f I_{sf} = R^+$$

avem:

$$\bigcup_s (\sigma)^s \Lambda_f = \bigcup_{n\,=\,0}^{\infty} \Lambda_n$$

a cărui închidere s-a demonstrat deja că este $L^2(R)$.

Dacă $s \le k$, pentru toate intervalele $I_{s,\,f}$ din I, atunci:

$$\bigcup_s (\sigma)^s \Lambda_f = (\sigma)^k \bigcup_{n\,=\,0}^{\infty} \Lambda_n$$

Închiderea membrului stâng este spațiul $(\sigma)^k L^2$ care este identic cu spațiul L^2.

Observații

1.Dacă m_o şi m_1 sunt filtre ortogonale atunci mulțimea din teorema anterioară este o bază ortonormală a lui $L^2(R)$.

2. Dacă I este o acoperire diadică a intervalului [0, 1) atunci pachetul de funcții "wavelet" $\left\{\psi_{sfp},\ I_{sf} \in I,\ p \in Z\right\}$ formează o bază a spațiului V_o.

În practică este important calculul coeficienților descompunerii unui semnal în bazele generate de pachetele de funcții "wavelet".

Fie:

$$\lambda_{sf}(p) = \left\langle x,\ \psi^{\vee}_{sfp} \right\rangle;\quad x \in L^2(R),\ s \in Z,\ p \in Z,\ f \geq 0 \tag{426}$$

Dacă:

$$x(\tau) = \tilde{\psi}^{\vee}_{sfp'}(\tau)$$

atunci:

$$\lambda_{sf}(p) = \left\langle \tilde{\psi}^{\vee}_{sfp'}(\tau), \tilde{\psi}^{\vee}_{sfp}(\tau) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-\frac{s}{2}} \tilde{\psi}_f\left(p' - 2^{-s}\tau\right) 2^{-\frac{s}{2}} \psi^{*}_f\left(p - 2^{-s}\tau\right) d\tau$$

Cu schimbarea de variabilă:

$$u = p' - 2^{-s}\tau$$

ultima relație devine:

$$\lambda_{sf}(p) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_f(u)\ \tilde{\psi}^{*}_f\left(u + p - p'\right) du \right)^{*} = \delta\left(p' - p\right) \tag{427}$$

Similar :

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_{sf}(p) = \left\langle x,\ \tilde{\psi}^{\vee}_{sfp} \right\rangle \\ x(\tau) = \sum_{p} \tilde{\lambda}_{sf}(p)\ \tilde{\psi}^{\vee}_{sfp}(\tau) \end{cases} \tag{428}$$

Se va mai folosi notația $\{\lambda\}$ pentru $\left\{\lambda_o\right\}$, produsele scalare ale lui *x* cu elementele bazei spațiului $(\sigma)^o \Lambda_o = V_o$. În continuare se vor calcula produsele scalare ale lui *x* cu fiecare dintre elementele bazelor spațiilor $(\sigma)^s \Lambda_f$ pentru $s > 0$ şi $0 \leq f < 2^s$, prin aplicarea operatorilor $\left(m_0 \downarrow\right)$ şi $\left(m_1 \downarrow\right)$ de *s* ori.

Aceste calcule sunt o consecinţă a următorului rezultat.

Lema 2.7.1.2.10 Secvenţele de coeficienţi $\left\{\lambda_{sf}\right\}$ satisfac relaţiile de recurenţă:

$$\lambda_{s+1\,2f}(p) = \left(m_o \downarrow\right) \lambda_{sf}(p) \tag{429}$$

$$\lambda_{s+1\,2f+1}(p) = \left(m_1 \downarrow\right) \lambda_{sf}(p) \tag{430}$$

Demonstraţie.

$$\lambda_{s+1\,2f}(p) = \left\langle x,\ \psi^{\vee}_{s+1\,2f\,p} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \psi^{*}_{2f}\left(-2^{-(s+1)}\tau + p\right) 2^{-\frac{(s+1)}{2}}\, d\tau \tag{431}$$

sau pe baza relaţiei (432):

$$\lambda_{s+1\,2f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, 2^{-\frac{(s+1)}{2}} \left[\sqrt{2}\sum_k m_o[k]\, \psi^{*}_{f}\left(2p - 2^{-s}\tau - k\right)\right] d\tau =$$

$$= \sum_k m_o[k] \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(2^{-\frac{s}{2}} \psi_f\left(2p - k - 2^{-s}\tau\right)\right)^{*} d\tau =$$

$$= \sum_k m_o[k] \left\langle x,\ \psi_{s,f,\,2p-k} \right\rangle = \sum_k m_o[k]\, \lambda_{sf}\left[2p - k\right] = \left(m_o \downarrow\right) \lambda_{sf}(p)$$

Demonstraţia relaţiei (430) este identică dacă se înlocuieşte m_o cu m_1. Pachetul de funcţii "wavelet" $\left\{\psi_{sfp}\right\}$ cuprinde o bibliotec• de funcţii, care se pot organiza pe baza lemei 2.7.1.2.10. Aceste funcţii formează un "arbore binar" ale cărui noduri sunt spaţiile $(\sigma)^s \Lambda_f$. "Rădăcina" acestui arbore este spaţiul $V_0 = \Lambda_0$. Acest arbore precum şi cel corespunzător coeficienţilor $\lambda_{sf}(p)$ sunt prezentaţi în figura 3.7.1.2.10. De fapt, citiţi invers (de jos în sus), arborii prezentaţi pot fi consideraţi şi ca fiind arbori de sinteză. Fiecare nod reprezintă "suma" celor două noduri imediat descendente (copiii nodului).

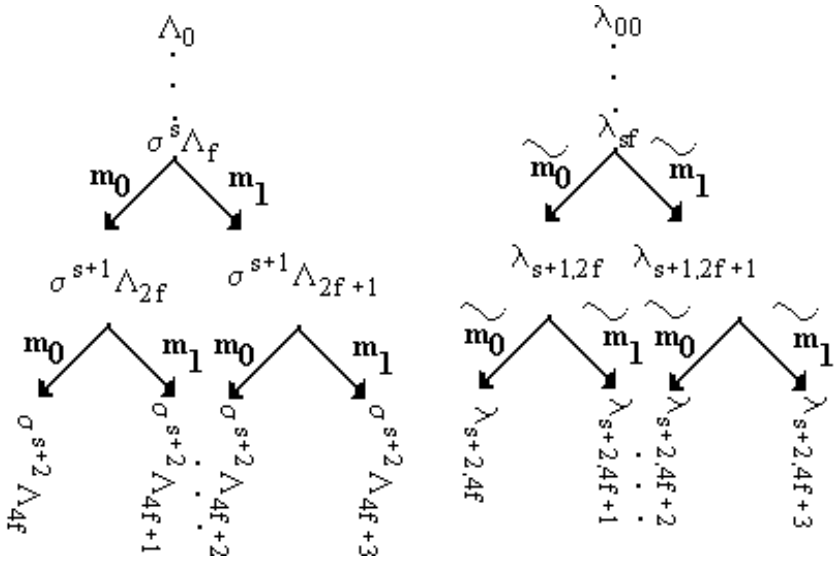


Figura 3.7.1.2.10 Arbori de analiză cu pachete de funcții "wavelet".

Pentru a obține analiza cu un pachet de funcții "wavelet" a unei funcții se parcurg următoarele etape:

1. Se determină coeficienții funcției în subspațiul rădăcină,

2. Se urmăresc ramurile arborelui din figura 3.7.1.2.10 pentru descompunerile funcției date în subspațiile descendente.

Ramurile arborelui corespund indicilor s şi f şi deci unei secvențe de operatori $\left(m_o \downarrow\right)$ şi $\left(m_1 \downarrow\right)$. Corespondența între elementele pachetului de funcții "wavelet" şi ramurile arborelui poate fi găsită pe baza reprezentării binare a întregului $f \in \left[0,\ 2^{-k} - 1\right]$, $f = \left(f_{k-1} \ldots f_1 f_o\right)_2$, folosind următoarea teorem•.

Teorema 3.7.1.2.10. Oricare ar fi $s \geq 0$ şi $0 \leq f < 2^s$, e valabilă relația:

$$\lambda_{sf} = \left(F_o \ldots F_{s-1}\right) \lambda(p) \tag{432}$$

unde:

$$F_i = \begin{cases} m_o\downarrow & daca \quad f_i = 0 \\ m_1\downarrow & daca \quad f_i = 1 \end{cases} \tag{433}$$

Practic, teorema a fost deja demonstrată.

În continuare se estimează complexitatea algoritmului sugerat de teorema 3.7.1.2.10. Dacă secvenţa rădăcină, $\lambda(p)$, are durata $2^N = D$ atunci fiecare aplicare a operatorilor $m_0\downarrow, m_1\downarrow$ consumă un număr de înmulţiri-adunări de ordinul de mărime a lui D ($O(D)$). Numărul maxim de iteraţii ale algoritmului depinde de valoarea lui D. Având în vedere că după fiecare iteraţie a algoritmului durata secvenţei obţinută este de două ori mai mică decât durata secvenţei de dinainte de iteraţie, rezultă că numărul maxim de iteraţii este:

$$N = log_2 D \tag{434}$$

De aceea numărul total de operaţii de înmulţire-adunare efectuate de algoritmul propus este de ordinul: $O(D \log_2 D)$. În figura 4.7.1.2.10 se prezintă o particularizare a arborelui de coeficienţi din figura 3.7.1.2.10 pentru pachetul de funcţii "wavelet" Haar-Walsh.

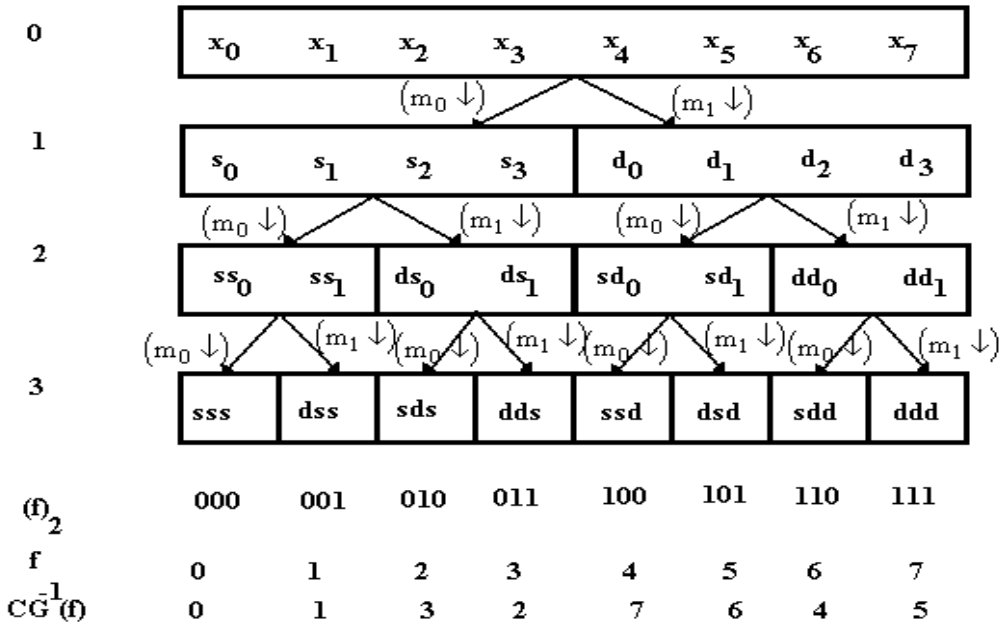


Figura 4.7.1.2.10 Ordonarea naturală a pachetului de funcţii "wavelet" Haar-Walsh pentru "rangul" 8 (2^3, s = 3).

Secvența de analizat are 8 eşantioane. Numărul de ordine al liniei reprezintă valoarea lui *s*. Linia 0 corespunde rădăcinii.

Numărul de ordine al coloanei este o combinație între indicele de frecvență *f* şi indicele de poziție *p*: indicii din fiecare bloc specifică poziția iar $CG^{-1}(f)$ specifică frecvența.

Dacă fiecare din cele 4 dreptunghiuri mari din figura 4.7.1.2.10 se suprapune peste intervalul [0, 1) atunci blocurile de coeficienți ocupă subintervale diadice. Secvența de coeficienți λ_{sf} este conținută într-un bloc care se suprapune peste intervalul I_{sf}. În figura 5.7.1.2.10 sunt prezentate graficele elementelor $\psi_{sfp}(\tau)$, din cadrul pachetului de funcții "wavelet" de tip Haar-Walsh corespunzătoare diferitelor blocuri din figura 4.7.1.2.10.

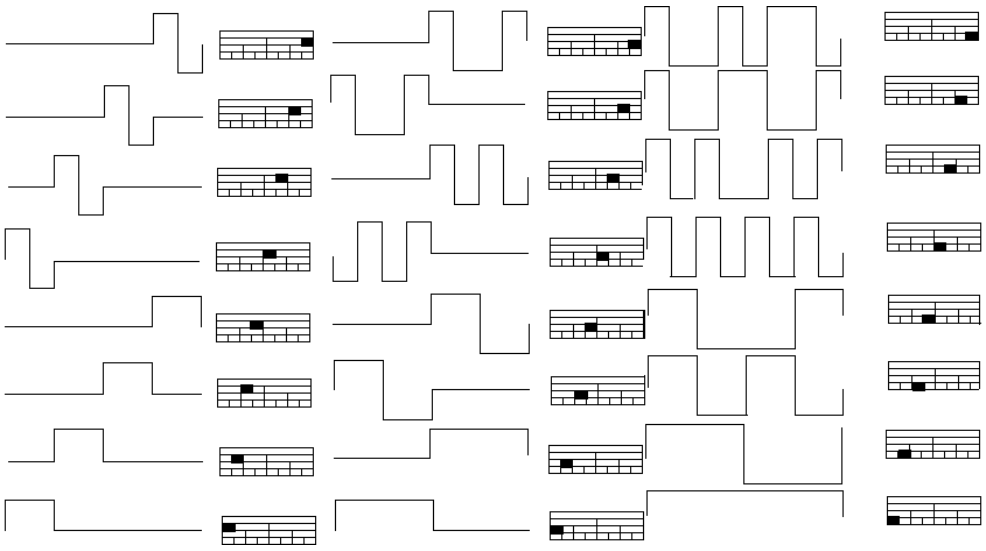


Figura 5.7.1.2.10 Pachetul de funcții "wavelet" de tip Haar-Walsh de rang 8.

Figura conține 3 coloane principale, fiecare alcătuită din două coloane secundare. În coloanele secundare din stânga sunt prezentate graficele, $\psi_{sfp}(\tau)$ iar în coloanele secundare din dreapta este prezentată poziția coeficientului corespunzător $\lambda_{sf}[p]$. Se constată că graficele funcțiilor $\psi_{3,f}(\tau)$ sunt identice cu graficele din figura 2.7.1.2.10, pentru $f = n$ şi $f = \overline{0, 5}$.

Se observă că există 24 de funcţii $\psi_{sfp}(\tau)$ pentru un număr util de 8 coeficienţi. Cele 24 de funcţii compun o mulţime mai redundantă decât o bază. Poate fi aleasă în consecinţă o submulţime cu caracteristici de bază, adaptată la un semnal particular sau la o problemă particulară. Când există posibilitatea alegerii unei baze pentru reprezentarea unui anumit semnal atunci poate fi căutată cea mai bună bază din punctul de vedere al unui anumit criteriu. În acest mod se obţine baza adaptată la semnalul considerat. Fie B o mulţime numărabilă de baze ale spaţiului Hilbert separabil X. Se prezintă o listă de proprietăţi utile pentru mulţimea B.

- Calculul rapid al produselor scalare cu elementele bazelor din B,
- Localizarea temporală bună a elementelor bazelor din B,
- Localizarea frecvenţială bună a elementelor bazelor din B,
- Independenţă, astfel încât să nu existe multe elemente ale unei baze care să se potrivească cu o anumită porţiune din semnalul de analizat.

Pentru a alege cea mai bună bază este necesar să se aprecieze în ce măsură fiecare bază din B are proprietăţile enunţate mai sus.

Înainte de a putea defini o reprezentare optimă, este necesar să se poată aprecia care este costul memorării unei anumite reprezentări. Vom numi acest cost, cost de informaţie. Fiind dată secvenţa $u[k]$ se poate defini o funcţională de cost de informaţie corespunzătoare secvenţei $u[k]$ prin:

$$M(u) = \sum_{k \in Z} \mu\left(|u[k]|\right), \quad \mu(0) = 0 \tag{435}$$

unde μ este o funcţie reală definită pe $[0, \infty)$.

Pentru orice element $x \in X$ se defineşte:

$$u[k] = \langle b_k , x \rangle$$

unde b_k este cel de al doilea element al bazei B din B.

Costul de informaţie al reprezentării lui x în baza B este $M\left(\langle b_k , x \rangle\right)$. S-a definit în acest mod funcţionala M_x pe B:

$$M_a: B \to R, \quad B \to M\left(\langle b_k, x \rangle\right) \tag{436}$$

S-a obţinut în acest mod costul de informaţie M al lui x în baza B. Cea mai bună bază din B pentru semnalul x în raport cu costul de informaţie M este acea bază B pentru care $M\left(\langle b_k , x \rangle\right)$ are valoarea minimă. În continuare se prezintă câteva exemple de funcţionale de cost de informaţie.

Exemplul 1. Numărul de eşantioane peste un anumit prag

Se fixează un prag ε şi se numără elementele din secvența $u[n]$ a căror valoare obținută depăşeşte pragul.

$$\mu(w) = \begin{cases} |w|, & |w| \geq \varepsilon \\ 0, & |w| < \varepsilon \end{cases}$$

Exemplul 2. Concentrarea în spațiul l^p, $0 < p < 2$:

$$\mu(w) = |w|^P$$
$$M(u) = \|u\|_P^P$$

Exemplul 3. Entropia

Entropia secvenței $u[n]$ este definită cu relația:

$$E(u) = \sum_k p(k) \log \frac{1}{p(k)} \tag{437}$$

unde:

$$p(k) = \frac{|u[k]|^2}{\|u[k]\|^2}; \quad p \log \frac{1}{p} = 0 \text{ dacă } p = 0 \tag{438}$$

Funcționala:

$$l(u) = \sum_k |u[k]|^2 \log \frac{1}{|u[k]|^2} \tag{439}$$

este o funcțională de cost de informație.

Exemplul 4. Logaritmul energiei

$$M(u) = \sum_{k=1}^{N} \log |u[k]|^2$$

Mulţimea B poate fi numită "bibliotec•" de baze. Dacă biblioteca de baze este un arbore de "înălţime" finită L (există L nivele de descompunere), atunci cea mai bună bază pentru un semnal x poate fi determinată prin calculul costului de informaţie în fiecare "nod" al arborelui şi prin compararea nodului "copil" cu nodul "părinte", începând de jos.
În acest mod fiecare nod este examinat de două ori, odată considerându-se că este un nod "copil" şi a doua oară considerându-se că este nod "părinte". Acest algoritm de căutare este exemplificat în figurile următoare. În figura 6.7.1.2.10 au fost plasate numere în interiorul nodurilor arborelui pentru a specifica costurile de informaţie. Se marchează cu asterisc toate nodurile de pe nivelul de jos. Costul lor total de informaţie este egal cu 28. Se încearcă reducere acestei valori. Ori de câte ori un nod "părinte" are un cost de informaţie inferior costului total de informaţie al nodurilor

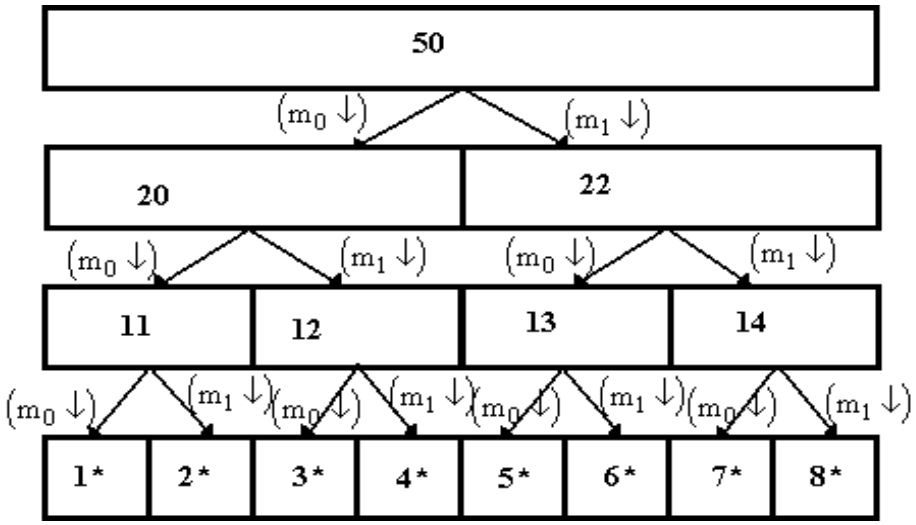


Figura 6.7.1.2.10 Iniţializarea algoritmului de căutare a celei mai bune baze.

sale "copii", acest nod "părinte" se marchează cu un asterisc. Dacă nodul "părinte" are un cost de informaţie superior celui al nodurilor "copii" care-i corespund, atunci acest nod "părinte" nu se marchează cu asterisc ci i se alocă costul total de informaţie al nodurilor "copii" care îi corespund. În figura 7.7.1.2.10 aceste costuri de informaţie transferate sunt prezentate între paranteze. Rezultatul căutării celei mai bune baze este prezentat în figura 8.7.1.2.10. Se constată că a avut loc o reducere a costului de informaţie de la valoarea 50 la valoarea 32. Algoritmi şi programe de implementare a pachetelor de funcţii "wavelet" precum şi a metodei de căutare a celei mai bune baze ca şi aplicaţii ale acestor metode vor fi prezentate în capitolele următoare.

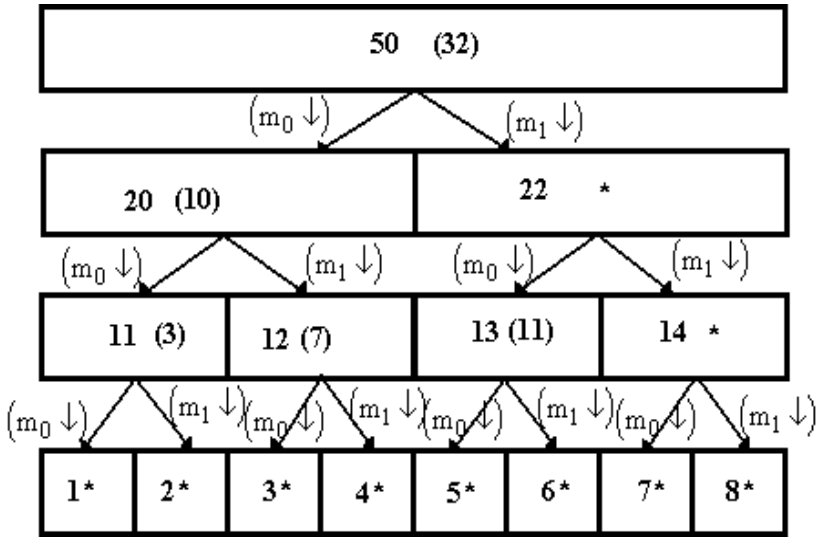


Figura 7.7.1.2.10 Primul pas al algoritmului de căutare a celei mai bune baze.

.

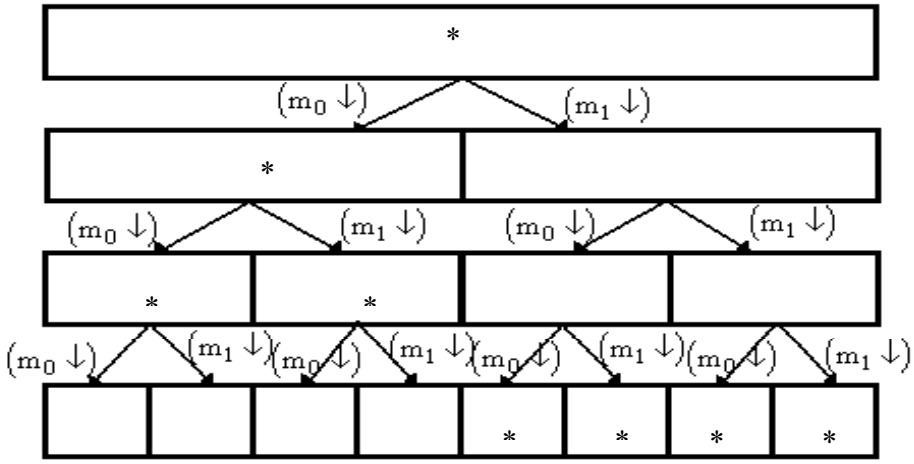


Figura 8.7.1.2.10. Rezultatul algoritmului de căutare a celei mai bune baze.

7.2 ANALIZA SEMNALELOR NESTAŢIONARE FOLOSIND UN DICŢIONAR TIMP-FRECVENŢĂ

Dacă se construieşte un pachet de funcţii "wavelet" aplicând de L ori artificiul de împărţire, atunci se pot obţine mai mult de 2^L baze ortonormale ale spaţiului V_o, dintre care doar L sunt baze ortonormale de funcţii "wavelet". Toate aceste L baze formează o bibliotec• de pachete de funcţii "wavelet". Fiecare element al uneia dintre aceste baze este un atom timp-frecvenţă. Atomii obţinuţi în urma aplicării metodei de selectare a celei mai bune baze sunt adaptaţi la semnalul de analizat din punctul de vedere al localizării în planul timp-frecvenţă.

După cum s-a văzut în exemplul dat în paragraful anterior în cazul pachetului de funcţii "wavelet" de tipul Haar-Walsh, localizarea în domeniul frecvenţă nu este foarte bună. Mai mult, nici indexarea atomilor în domeniul frecvenţă nu este simplă. O clasă de atomi timp-frecvenţă cu proprietăţi superioare a fost introdusă de S. Mallat în anul 1992 [91].

El a pornit de la o funcţie temporală $w(\tau)$ şi a construit atomii timp-frecvenţă prin scalare, translatare şi modulaţie. Un atom din această clasă se exprimă cu relaţia:

$$w_{s,\, w_o,\, t_o}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{s}}\, w\left(\frac{\tau - t_o}{s}\right) e^{j\,\omega_o \tau} \tag{440}$$

Se observă că în acest mod indicii de scară, s, şi de frecvenţă, ω_o, sunt cu variaţie independentă. În continuare se determină durata efectivă şi banda efectivă ale atomului definit în relaţia (476). Avem:

$$\sigma_t^2\left(w_{s,\, \omega_o,\, t_o}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^2}{s} \left| w\left(\frac{\tau - t_o}{s}\right)\right|^2 d\tau$$

Pentru $t_0 = 0$, ultima relaţie devine:

$$\sigma_t^2\left(w_{s,\, \omega_o,\, 0}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} s\, u^2 \left|w\,(u)\right|^2 s\, du \;,\quad u = \frac{\tau}{s}$$

adică:

$$\sigma_t\left(w_{s,\, \omega_o,\, 0}\right) = s\, \sigma_t\left(w_{1,\, \omega_o,\, 0}\right) = s\, \sigma_t(w) \tag{441}$$

Deci atomul $w_{s,\,\omega_o,\,t_o}(\tau)$ este localizat în timp într-un interval centrat pe momentul t_o, de lungime $s\sigma_t(w)$.

Banda de frecvență efectivă a acestui atom este:

$$\sigma_t^2\left(w_{s,\,\omega_o,\,t_o}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left| F\left\{w_{s,\,\omega_o,\,t_o}\right\}\right|^2 d\omega$$

Dar:

$$F\left\{w_{s,\,\omega_o,\,t_o}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}}\, w\left(\frac{\tau - t_o}{s}\right) e^{-j(\omega-\omega_o)\tau}\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}}\, w(u)\, e^{-j(\omega-\omega_o)(su+t_o)}\, s\, du = \sqrt{s}\, e^{-j(\omega-\omega_o)t_o}\, F\{w\}\left(s(\omega-\omega_o)\right)$$

Deci:

$$\sigma_\omega^2\left\{w_{s,\,\omega_o,\,t_o}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\, s \left|F\{w\}\left(s(\omega-\omega_o)\right)\right|^2 d\omega$$

Pentru $\omega_o = 0$, rezultă:

$$\sigma_\omega^2\left\{w_{s,\,0,\,t_o}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{s}\, \left|F\{w\}(u)\right|^2 \frac{du}{s}$$

sau:

$$\sigma_\omega\left\{w_{s,\,0,\,t_o}\right\} = \frac{1}{s}\,\sigma_\omega(w) \qquad (442)$$

În consecință localizarea în frecvență a atomului considerat se face într-un interval centrat pe ω_o, de lungime $\frac{1}{s}\sigma_\omega(w)$. Deci aria celulei de rezoluție din planul timp-frecvență, corespunzătoare atomului considerat este:

$$A_{cr} = \sigma_t(w)\,\sigma_\omega(w)$$

egală cu aria celulei de rezoluție a ferestrei temporale $w(\tau)$.

Fie:

$$\gamma = \left(s,\, \omega_o,\, t_o\right)$$

Mulțimea $\left\{ w_\gamma(\tau) \right\}_\gamma$ reprezintă un "dicționar timp-frecvență".

Această mulțime este redundantă. Pentru a reprezenta un semnal de energie finită $x(\tau)$ cu ajutorul atomilor timp-frecvență din acest dicționar se selectează o mulțime numărabilă de atomi $\left\{ w_{\gamma_n}(\tau) \right\}_{n \in Z}$ astfel încât:

$$x(\tau) = \sum_n a_n w_{\gamma_n}(\tau) \tag{443}$$

Alegerea atomilor timp-frecvență $w_{\gamma_n}(\tau)$ poate fi făcută cu un algoritm adaptiv numit "matching pursuit". Acest algoritm are următoarele etape:

- Se alege primul atom, $w_{\gamma_0}(\tau)$ astfel încât:

$$\left| \left\langle x,\ w_{\gamma_o} \right\rangle \right| = \sup_\gamma \left| \left\langle x,\ w_\gamma \right\rangle \right|$$

şi se face descompunerea:

$$x = \left\langle x, w_{\gamma_0} \right\rangle w_{\gamma_0} + R_x^0$$

unde R_x^0 reprezintă eroarea de aproximare a lui x prin $\left\langle x, w_{\gamma_0} \right\rangle w_{\gamma_0}$.

-Se alege cel de al doilea atom, $w_{\gamma_1}(\tau)$ astfel încât :

$$\left| \left\langle R_x^0, w_{\gamma_1} \right\rangle \right| = \sup_\gamma \left| \left\langle R_x^0, w_\gamma \right\rangle \right|$$

şi se face descompunerea:

$$R_x = \left\langle R_x,\ w_{\gamma_1} \right\rangle w_{\gamma_1} + R_x^1$$

Algoritmul se continuă până când eroarea de aproximare scade sub o valoare impusă.

Dacă închiderea mulțimii $\left\{ w_{\gamma_n}(\tau) \right\}_{n \in I}$ este chiar $L^2(R)$ atunci:

$$\lim_{n \to \infty} \left\| R_x^n \right\| = 0$$

şi expresia lui $x(\tau)$ devine:

$$x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle R_x^n, w_{\gamma_n} \right\rangle w_{\gamma_n} \tag{444}$$

În acest caz este valabilă şi relația:

$$\|x\|^2 = \sum_n \left| \left\langle R_x^n, w_{\gamma_n} \right\rangle \right|^2$$

Algoritmul descris este inspirat din tehnicile de estimare statistică a parametrilor. Acest algoritm se utilizează şi în cazul reprezentărilor timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă adaptivă, definită în paragraful 8.1 din [117].

Principalul său dezavantaj este volumul mare de calcul pe care îl implică.

În paragraful 7.1 a fost prezentată o metodă asemănătoare de aproximare a semnalelor de energie finită folosind cadre. În [42] este prezentat un algoritm de găsire a cadrului adaptat la un semnal dat, $x(\tau)$. Acest algoritm conduce la minimizarea erorii de aproximare din relația (155'). În cazul acestui algoritm, dicționarul timp-frecvență corespunzător are ca şi atomi elementele cadrelor. De aceea acest algoritm de căutare a fost numit metoda "frame".

Pe lângă metodele "matching pursuit", “cea mai bună bază” şi "frame" mai există şi o a patra metodă de găsire a elementelor unui dicționar timp-frecvență care să se adapteze cel mai bine la dezvoltarea unui anumit semnal impus. Această metodă este propusă de D.Donoho în [25]. Numele metodei este "basis pursuit". Ideea acestei metode este găsirea mulțimii $\{\psi_n\}_{n \in Z}$ într-un dicționar timp-frecvență prin minimizarea normei l^1 a coeficienților a_n din formula:

$$x(\tau) \cong \sum_n a_n \psi_n(\tau) \tag{445}$$

la o eroare de aproximare impusă. Aplicații ale acestei metode sunt prezentate în [19].

7.3 DISCRETIZAREA REPREZENTĂRILOR BILINIARE

Calea tradițională de analiză a unui semnal în timp continuu, cu ajutorul calculatorului numeric, este bazată pe utilizarea variantei eşantionate a acelui semnal. Această cale este folosită, spre exemplu, la construcția analizoarelor de spectru bazate pe utilizarea algoritmului FFT [124]. Fie $x(t)$ semnalul de analizat şi $x_e(t)$, varianta sa eşantionată. Este vorba despre eşantionarea uniformă (ideală, cu pasul T):

$$x_e(t) = x(t)\,\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

Reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă a semnalului $x_e(t)$ este:

$$TF_{x_e}^{STFT}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(\tau)w(\tau-t)\,e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_k x(kT)\delta(\tau-kT)w(\tau-t)e^{-j\,\omega\tau}d\tau\right)$$

$$= \sum_k x(kT)\int_{-\infty}^{\infty} w(kT-t)\,\delta(\tau-kT)\,e^{-j\,\omega\,k\,T}d\tau = \sum_k x(kT)\,w(kT-t)\,e^{-j\,\omega\,k\,T}$$

De aceea se poate scrie:

$$TF_{x_e}^{STFT}(nT,\omega) = \sum_k x(kT)\,w\left((k-n)T\right)\,e^{-j\,\omega\,k\,T}$$

Dar:

$$x_e[n] = x[n]$$

Pentru T = 1, se obține reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă a semnalului în timp discret $x[n]$:

$$TF_x^{STFT}(n,\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]w[k-n]e^{-j\Omega k} \tag{446}$$

De aceea se poate afirma că reprezentarea timp-frecvență de tipul spectogramă are expresia:

$$TF_x^{S}(n,\,\Omega) = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\;w[k-n]\;e^{-j\,\Omega\,k}\right|^2 \tag{447}$$

Din cauza continuității acestei reprezentări cu variabila Ω, ea nu poate fi calculată numeric. De aceea se recurge şi la eşantionarea variabilei Ω. Având în vedere periodicitatea cu 2π după variabila Ω a funcțiilor $TF_x^{STFT}(n, \Omega)$ şi $TF_x^{S}(n, \Omega)$, pe baza formulelor (346) şi (347) pot fi stabilite definițiile reprezentărilor discrete de tip transformare Fourier scurtă respectiv, spectogramă:

$$TF_x^{STFT}[n,\ k] = \sum_{l\ =\ -\infty}^{\infty} x[l]\ w[l-n]\ e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,l}, \qquad k\ =\ \overline{0,\ N-1} \tag{448}$$

$$TF_x^{S}[n,\ k] = \left| \sum_{l\ =\ -\infty}^{\infty} x[l]\ w[l-n]\ e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,l} \right|^2, \qquad k\ =\ \overline{0,\ N-1} \tag{449}$$

Proprietățile acestei reprezentări timp-frecvență sunt prezentate în [94]. Având în vedere faptul că reprezentarea timp-frecvență de tipul funcției de incertitudine a semnalului $x(t)$ este identică cu transformarea Fourier scurtă a aceluiaşi semnal folosind fereastra temporală:

$$x(t) = w(t)$$

se poate defini reprezentarea discretă de tipul funcție de incertitudine a semnalului în timp discret $x[n]$ cu relația:

$$TF_x^{FI}[n,\ k] = \sum_{m\ =\ -\infty}^{\infty} x[m]\ x[m-n]\ e^{j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,m}, \qquad k\ =\ \overline{0,\ N-1} \tag{450}$$

Ținând seama de relația (69), care reprezintă legătura dintre nucleele reprezentărilor timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine respectiv Wigner-Ville se poate defini şi reprezentarea discretă de tipul Wigner-Ville:

$$TF_x^{W-V}[n,\ k] = \sum_{m\ =\ 0}^{\infty} x[n+m]\ x^*[n-m]\ e^{-2j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,m}, \qquad k\ =\ \overline{0,\ N-1} \tag{451}$$

Aplicând reprezentarea timp-frecvență de tipul transformare "wavelet" continuă semnalului $x_e(t)$ se obține:

$$TF_{x_e}^{CWT}(t,\omega)=\sqrt{\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_k x(kT)\delta(t-kT)\psi(\omega(\tau-t))d\tau=\sqrt{\omega}\sum_k x(kT)\psi(\omega(kT-t))$$

De aceea reprezentarea timp-frecvență de tipul "wavelet" discretă a semnalului $x[n]$ este:

$$TF_x^{CWT}[n,\ k]=\sqrt{k\ \frac{2\pi}{N}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\ \psi\left(k\ \frac{2\pi}{N}(m-n)\right),\quad k=\overline{1,\ N} \qquad (452)$$

În consecință reprezentarea timp-frecvență de tipul scalogramă discretă, are expresia:

$$TF_x^{S_C}[n,\ k]=k\ \frac{2\pi}{N}\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\ \psi\left(k\ \frac{2\pi}{N}(m-n)\right)\right|^2,\quad k=\overline{1,\ N} \qquad (453)$$

Având în vedere modul în care au fost deduse expresiile principalelor reprezentări timp-frecvență biliniare discrete, în acest paragraf, rezultă că acestea aproximează cu atât mai bine reprezentările continue corespunzătoare cu cât valoarea folosită pentru T este mai mică respectiv cu cât valoarea folosită pentru N este mai mare. La fel ca şi în cazul transform•rii Fourier discrete, [57],şi în cazul transformărilor din acest paragraf se poate vorbi despre erori de aliere în timp şi în frecvență respectiv despre erori de trunchiere. Toate reprezentările timp-frecvență discrete prezentate au proprietăți specifice, care ar merita să fie studiate. Acest studiu nu va fi prezentat în această carte având în vedere că aici reprezentările discrete sunt privite doar ca şi un mijloc de calcul numeric al reprezentărilor continue. În consecință nu ne interesează reprezentările discrete ca obiect în sine. Având în vedere convergența reprezentărilor discrete la reprezentările continue corespunzătoare, în fiecare punct al planului timp-frecvență, putem considera că şi reprezentările discrete se bucură de proprietățile reprezentărilor continue deja demonstrate. Acest punct de vedere nu este nou, el stă la baza construcției unor programe de calcul numeric cum este de exemplu programul MATHCAD sau programul MATLAB. Formule similare pot fi deduse pentru toate reprezentările biliniare generalizate prezentate în această lucrare. Mai sus au fost prezentate atât reprezentări timp-frecvență discrete liniare (relațiile (448), (452)) cât şi reprezentări timp-frecvență discrete biliniare (relațiile (449),(450), (451) şi (453)). Toate aceste reprezentări discrete au fost construite prin eşantionarea în domeniul frecvență a unor reprezentări în timp discret corespunzătoare (de exemplu $TF_x^{STFT}(n,\Omega)$). Aceste reprezentări în timp discret s-au obținut prin aplicarea reprezentării continue corespunzătoare semnalului $x_e(t)$. E clar că reprezentările în timp discret aproximează reprezentările continue în măsura în care semnalul $x_e(t)$ aproximează semnalul $x(t)$.

Aproximarea este afectată de eroarea de aliere. Această eroare este cu atât mai mică cu cât se eşantionează mai des (adică cu cât valoarea pasului T este mai mică). La aceeaşi valoare a lui T valoarea erorii de aliere depinde de lățimea benzii efective de frecvență a semnalului care se eşantionează. Cu cât această lățime este mai mică cu atât şi valoarea maximă a erorii de aliere este mai mică, la o valoare fixată a lui T. Aici se manifestă diferența dintre transformările liniare şi cele biliniare. Această diferență se va analiza luând ca exemplu cuplul de reprezentări: de tip transformare Fourier scurt• (din categoria reprezent•rilor liniare) şi de tip Wigner-Ville (din categoria reprezentărilor biliniare). Admițând că semnalul *x(t)* are banda de frecvențe B este necesar ca el să fie eşantionat cu un pas T care satisface condiția:

$$\frac{2\pi}{T} \geq 2B \quad \Leftrightarrow \quad T \leq \frac{\pi}{B} \tag{454}$$

Valoarea maximă a pasului T care poate fi utilizat pentru construcția reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă în timp discret este deci:

$$T = \frac{\pi}{B} \tag{455}$$

În cazul reprezentării timp-frecvență de tipul Winger-Ville:

$$TF_{x_e}^{W-V}(t,\ \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t+\tau)\, x_e^*(t-\tau)\, e^{-j\,2\,\omega\tau}\, d\tau$$

nu se mai eşantionează semnalul $x(t)$ ci semnalul $x(t+\tau)x^*(t-\tau)$. E clar că banda de frecvențe a acestuia este de lățime 2B. Deci în acest caz este necesar să se eşantioneze cu un pas de valoare maximă $\pi/2B$. Deci în cazul reprezentărilor biliniare eroarea de aproximare a reprezentării continue prin reprezentarea discretă este mai mare decât în cazul reprezentărilor liniare. În cazul reprezentării de tip Wigner-Ville se preferă uneori calculul reprezentării semnalului analitic asociat în locul reprezentării semnalului. Spectrul semnalului analitic asociat unui semnal al cărui suport frecvențial este simetric față de frecvența nulă este localizat într-un interval de frecvențe pozitive a cărui lungime este egală cu jumătate din lungimea intervalului în care este localizat spectrul semnalului inițial. De aceea pentru discretizarea reprezentării Wigner-Ville a semnalului analitic asociat unui semnal se poate utiliza aceeaşi valoare a pasului de eşantionare ca şi în cazul discretizării reprezentării de tipul transformare Fourier scurtă a aceluiaşi semnal. Deşi se obține aceeaşi eroare de aliere totuşi reprezentarea Wigner-Ville discretă a semnalului analitic asociat semnalului de analizat are un dezavantaj. Deoarece semnalul analitic asociat este complex, numărul de operații care trebuiesc efectuate este de două ori mai mare în cazul calculului reprezentării discrete de tip Wigner-Ville a semnalului analitic asociat decât în cazul reprezentării discrete de tip

transformare Fourier scurtă a semnalului inițial (aceleaşi operații se efectuează atât pentru partea reală a semnalului analitic cât şi pentru partea sa imaginară).

Metoda descrisă este avantajoasă în cazul prelucrărilor de semnal bazate pe utilizarea semnalului analitic. Formulele din acest paragraf au fost stabilite în ipoteza că semnalul de analizat $x(t)$ era continuu şi aperiodic.

Pot fi definite reprezentări biliniare discrete şi pentru semnale $x(t)$ discrete şi aperiodice sau continue şi periodice sau discrete şi periodice. Astfel de reprezentări discrete sunt prezentate în [105].

Reprezentările biliniare din clasa lui Cohen respectiv din clasa afină reprezintă practic generalizări ale noțiunii de densitate spectrotemporală de energie. O astfel de noțiune se poate defini şi pe spațiul $l^2(Z)$. Pornind de la o astfel de definiție în [101] se introduc noi tipuri de reprezentări timp-frecvență biliniare discrete, folosind un punct de vedere pur discret.

Şi în cazul reprezentărilor timp-frecvență biliniare s-au încercat discretizări bazate pe teoria cadrelor. Un astfel de exemplu de discretizare este prezentat în [109]. Având în vedere că descompunerile în cadre sunt operații liniare, pentru a putea fi utilizate aceste mulțimi la studiul reprezentărilor biliniare este necesară intoducerea unui context liniar-biliniar. Acest context este creat în ultima lucrare citată prin utilizarea mixtă a unei reprezentări liniare şi a unei reprezentări biliniare.

Tot un context liniar-biliniar este creat şi în lucrarea [67], sau în paragraful 7.2 din [117]. Având în vedere noutatea referințelor bibliografice citate rezultă actualitatea problemei discretizării reprezentărilor timp-frecvență biliniare.

7.4 ATOMI TIMP-FRECVENȚĂ ŞI REPREZENTĂRI BILINIARE

La studiul discretizării reprezentărilor timp-frecvență liniare s-a arătat că semnalul de analizat, $x(t)$, poate fi reconstruit cu formule de tipul:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_lTF_x\left(n\, t_o,\, m\, \omega_o\right) a_{m,\,n}(\tau)$$

unde cu ${}_lTF_x\left(n\, t_o,\, m\, \omega_o\right)$ s-au notat eşantioanele reprezentării liniare (de tip transformare Fourier scurtă sau transformare "wavelet" continuă) iar cu $a_{m,\,n}(\tau)$ atomii timp-frecvență. Membrul drept al ultimei relații reprezintă o serie de atomi timp-frecvență. Descompunerea atomică a semnalului $x(t)$ este o consecință directă a liniarității reprezentării timp-frecvență utilizată. În acest paragraf se vor prezenta

modalități de utilizare a reprezentărilor timp-frecvență biliniare la descompunerea atomică a semnalelor nestaționare. Mai mult, vor fi prezentate descompuneri atomice ale reprezentărilor biliniare. Cea mai simplă cale de descompunere liniară a unei reprezentări timp-frecvență biliniară este bazată pe utilizarea unei formule de tipul celei prezentate în ultima relație (dar pentru funcții de două variabile):

$$ {}_bTF_x(t,\,\omega) \;=\; \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q C_{m,\,n,\,p,\,q}\; a_{m,\,n,\,p,\,q}(t,\,\omega) $$

unde:

$$ C_{m,\,n,\,p,\,q} \;=\; {}_lTF_{{}_bTF_x}(m,\,n,\,p,\,q) $$

Cu ${}_bTF_x$ s-a notat reprezentarea biliniară iar cu ${}_lTF_{{}_bTF_x}$ s-a notat reprezentarea liniară a reprezentării biliniare.

Dacă se consideră cazul particular în care reprezentarea biliniară este de tip Winger-Ville iar reprezentarea liniară este de tip Gabor, atunci:

$$ C_{m,\,n,\,p,\,q} \;=\; TF^{STFT}_{TF_x^{W-V}}(m,\,n,\,p,\,q) $$

iar:

$$ a_{m,\,n,\,p,\,q}(t,\,\omega) \;=\; w_{m,\,n,\,p,\,q}(t,\,\omega) \;=\; w(t - n\,t_o,\,\omega - m\,\omega_o)\; e^{j\left(p\,t_o\omega + q\,\omega_o t - k\,\omega_o p\,t_o\right)} $$

în care:

$$ w(\tau,\,\omega) \;=\; e^{-\alpha\,\tau^2 - \frac{1}{\alpha}\,\omega^2} $$

Deşi atomii definiți mai sus au o localizare bună în planul timp-frecvență totuşi descompunerea atomică propusă se aplică cu dificultate în practică deoarece calculul coeficienților $C_{m,n,p,q}$ este dificil. În continuare se prezintă o descompunere atomică alternativ•. Ideea este să se facă la început o descompunere liniară a semnalului de analizat şi reprezentarea biliniară să se aplice rezultatului. De exemplu, folosind atomii timp-frecvență de tip Gabor, se poate scrie:

$$ x(\tau) \;=\; \sum_m \sum_n TF_x^{STFT}\left(n\,t_o,\; m\,\omega_o\right)\, a_{m,\,n}(\tau) $$

cu:

$$a_{m,\,n}(\tau) \;=\; \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\frac{\alpha}{2}\left(\tau - m t_o\right)^2 + j\, m\, \omega_o \tau}$$

Generalizând relația (73), se poate demonstra că reprezentarea Wingner-Ville a semnalului $x(t)$ este:

$$\mathrm{TF}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{W-V}}(t,\,\omega) =$$

$$= \sum_{\mathrm{m}=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathrm{p}=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathrm{q}=-\infty}^{\infty} \mathrm{TF}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{STFT}}\left(n\, t_{\mathrm{o}},\, m\, \omega_{\mathrm{o}}\right)\, \mathrm{TF}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{STFT}}\left(p\, t_{\mathrm{o}},\, q\, \omega_{\mathrm{o}}\right) \mathrm{TF}_{\mathrm{a_{m,\,n}},\,\mathrm{a_{p,\,q}}}^{\mathrm{W-V}}(t,\,\omega)$$

Se poate demonstra că:

$$TF_{a_{m,\,n},\,a_{p,\,q}}^{W-V}(t,\,\omega) = 2e^{-\alpha\left(t - \frac{n+p}{2} t_o\right)^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\omega - \frac{m+q}{2}\,\omega_o\right)^2} e^{-j\frac{n+p}{2}\omega_o (m-q)\, t_o}$$

$$e^{j\left[(m-q)\, t_o \omega \,+\, (n-p)\, \omega_o t\right]}$$

Această relație poate fi calculată numeric folosind algoritmi rapizi. Un astfel de algoritm este prezentat în paragraful 7.2 din [117]. Ultima relație reprezintă un exemplu de reprezentare timp-frecvență de tip serie de atomi timp-frecvență. Ea poate fi rescrisă în forma:

$$TF_x^{W-V}(t,\,\omega) = \sum_{d\,=\,0}^{\infty} TF_x^{STFT}\left(n\, t_o,\, m\, \omega_o\right)\, TF_x^{STFT}\left(p\, t_o,\, q\, \omega_o\right) TF_{a_{m,\,n},\,a_{p,\,q}}^{W-V}(t,\,\omega)$$

unde cu d s-a notat distanța:

$$|m-q| \;+\; |n-p| \;=\; d$$

Se obține aproximarea de ordinul D a reprezentării Wigner-Ville:

$$TF_x^{W-V}(t,\,\omega) \cong \sum_{d\,=\,0}^{D} TF_x^{STFT}\left(n\, t_o,\, m\, \omega_o\right)\, TF_x^{STFT}\left(p\, t_o,\, q\, \omega_o\right)\, TF_{a_{m,\,n},\,a_{p,\,q}}^{W-V}(t,\,\omega) \;=$$

$$= {}_D TFS_x(t,\,\omega)$$

Prin alegerea ordinului D poate fi obținută o aproximare a reprezentării Wingner-Ville prin reprezentarea de tip ${}_D TFS_x(t,\,\omega)$ de eroare impusă. Trebuie remarcat că pentru

valori mici ale ordinului în reprezentarea ${}_D TFS_x(t, \omega)$ nu apar termeni de interferență.

Descompunerea semnalului de analizat în atomi timp-frecvență de tip transformare Fourier scurtă:

$$x(\tau) = \sum_m \sum_n TF_x^{STFT}(n\, t_o,\, m\, \omega_o)\, w_{m,\, n}(\tau)$$

poate fi exploatată pentru construcția unor algoritmi rapizi de calcul al unor reprezentării timp-frecvență şi în forma sa discretă. În cazul algoritmului prezentat mai sus era exploatată reprezentarea timp-frecvență de tip Wigner-Ville a acestei descompuneri. Pentru a putea folosi ultima relație la construcția unor algoritmi rapizi, este necesară alegerea unui număr finit de atomi timp-frecvență din mulțimea $\left\{w_{m,\, n}(\tau)\right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$. În acest scop poate fi folosit algoritmul "matching pursuit" prezentat în paragraful 7.2. Evident, în cazul de față dicționarul timp-frecvență va fi mulțimea $\left\{w_{m,\, n}(\tau)\right\}_{m \in Z,\, n \in Z}$. În urma aplicării algoritmului "matching pursuit" ultima relație devine:

$$x(\tau) \cong \sum_{p=0}^{\infty} B_p w_p(\tau) \quad ; \qquad x(\tau) \cong \sum_{p=0}^{P} B_p w_p(t)$$

cu:

$$\left\| x(\tau) \right\|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \left| B_p \right|^2$$

De aceea:

$$TF_x^{W-V}(t, \omega) = \sum_p B_p^2\, TF_{w_p}^{W-V}(t, \omega) + \sum_{\substack{q \\ q \neq p}} B_p B_q^*\, TF_{w_p,\, w_q}^{W-V}(t, \omega)$$

Termenii primei serii din membrul drept reprezintă elemente utile pentru analiza timp-frecvență a semnalului $x(t)$, în timp ce termenii celei de a doua serii sunt termenii de interferențe.

Deoarece:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} TF_{w_p}^{W-V}(t, \omega)\, dt\, d\omega = \left\| w_p \right\|^2 = 1$$

şi:

$$\|x(\tau)\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} TF_x^{W-V}(t,\omega)dt\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_p B_p^2 TF_{w_p}^{W-V}(t,\omega)dt\,d\omega + \right.$$

$$\left. \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{q\\ q\neq p}} B_p B_q^* TF_{w_p,w_q}^{W-V}(t,\,\omega)\,dt\,d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_p \left|B_p\right|^2 TF_{w_p}^{W-V}(t,\omega)dtd\omega +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{q\\ p\neq q}} B_p B_q^* TF_{w_p,\,w_q}^{W-V}(t,\,\omega)\,dt\,d\omega\Big] =$$

$$= \sum_p \left|B_p\right|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{q\\ p\neq q}} B_p B_q^* TF_{w_p,\,w_q}^{W-V}(t,\,\omega)\,dt\,d\omega$$

rezultă că:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{q\\ p\neq q}} B_p B_q^*\, TF_{w_p,\,w_q}^{W-V}(t,\,\omega)\,dt\,d\omega \;=\; 0$$

Deci cel de al doilea termen din membrul drept al expresiei $TF_x^{W-V}(t,\,\omega)$ are energia nul•. De aceea poate fi definită o nouă reprezentare timp-frecvență:

$$TF_x^{AS}(t,\,\omega) = \sum_p \left|B_p\right|^2 TF_{w_p}^{W-V}(t,\,\omega)$$

unde:

$$B_p = \left\langle x,\, w_p \right\rangle$$

Aceasta poartă numele de "spectrogramă adaptivă" (Adaptive Spectrogram). Atributul adaptiv vine de la utilizarea algoritmului "matching pursuit", iar denumirea de spectrogramă vine de la folosirea ferestrelor w_p.

Și pentru reprezentarea timp-frecvență de tip Gabor există o variantă adaptivă. În acest caz:

$$a_{m,\,n}(t) = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n\,t_o)^2} \cdot e^{j\,\omega_o m\,t}$$

Parametrul α^{-1}reprezintă dispersia funcției Gaussiene din ultima relație. Atomii $a_{m,n}(t)$ ar putea fi adaptați la semnalul de analizat prin alegerea dispersiei funcției Gaussiene şi a centrelor lor $\left(n\, t_o,\ \omega_o m\right)$ în funcție de acesta. În acest mod se obține:

$$a_p(t) = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\frac{\alpha p}{2}\left(t - t_p\right)^2} \cdot e^{j\,\omega_p\, t}$$

Transformarea Wigner-Ville a unui astfel de atom este:

$$TF_{a_p}^{W-V}(t,\ \omega) = 2\, e^{-\alpha p\left(t - t_p\right)^2 + \frac{\left(\omega - \omega_p\right)^2}{\alpha_p}}$$

Folosind aceşti atomi, după aplicarea algoritmului "matching pursuit" se obține reprezentarea Gabor adaptivă a semnalului $x(\tau)$:

$$x(\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} B_p\, a_p(\tau)$$

respectiv reprezentarea timp-frecvență de tip Gabor adaptivă:

$$TF_x^{ASG}(t,\ \omega) = 2\sum_{p=0}^{P}\left|B_p\right|^2 e^{-\left(\alpha_p\left(t - t_p\right)^2 + \frac{1}{\alpha_p}\left(\omega - \omega_p\right)^2\right)}$$

cu: $$B_p = \left\langle x,\ a_p \right\rangle$$

Capitolul 8

ALGORITMI ŞI PROGRAME DE CALCUL A REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ

O modalitate de calcul numeric a reprezentărilor timp-frecvență continue se bazează pe calculul numeric al integralelor din definiția acestor reprezentări. În acest scop, pot fi folosite metode numerice, cum este de exemplu metoda coardei sau metoda tangentei sau metode mai evoluate, ca de exemplu metoda Gauss sau metoda Runge-Kuta [18]. Dezavantajul acestor metode este volumul mare de calcul care este necesar pentru aplicarea lor. Totuşi această soluție este cea mai comodă având în vedere că există programe de matematică de uz general, cum este de exemplu programul MATHCAD sau programul MATLAB care efectuează calculul numeric al integralelor. Cu ajutorul acestor programe pot fi şi vizualizate reprezentările timp-frecvență obținute. Trebuie menționat că programul MATLAB are chiar un TOOL-BOX specializat pentru reprezentările timp-frecvență, (Time-Frequency Toolbox) realizat în urma colaborării dintre CNRS din Franța şi Universitatea Rice din Statele Unite. Autorii acestei colecții de subrutine MATLAB sunt François Auger, Patrick Flandrin, Paulo Gonçalvès şi Olivier Lemoine. E clar că o modalitate de calcul superioară trebuie să se bazeze pe utilizarea unui algoritm rapid. Cel mai cunoscut algoritm rapid de calcul este algoritmul "FFT", [114].

8.1 UTILIZAREA ALGORITMULUI FFT LA CALCULUL REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ

Toate reprezentărilor timp-frecvență discretizate, prezentate în paragraful 7.3, pot fi calculate folosind algoritmul FFT. Într-adevăr, relațiile (448)-(453) pot fi rescrise conform tabelului 1.8.1. Se constată că toate reprezentările timp-frecvență discrete pot fi exprimate în forma:

$$a_k[n] * b[n], \quad k = \overline{1, N} \tag{456}$$

Deci calculul unei reprezentări timp-frecvență revine la calculul a N produse de convoluție. Acestea pot fi calculate cu ajutorul algoritmului FFT urmând procedura următoare:

- Se calculează: $\mathrm{FFT}\left\{a_k[n]\right\}$;
- Se calculează: $\mathrm{FFT}\left\{b[n]\right\}$;
- Se face produsul: $\mathrm{FFT}\left\{a_k[n]\right\} \cdot \mathrm{FFT}\left\{b[n]\right\}$;
- Se calculează transformarea inversă: $\mathrm{FFT}^{-1}\left\{\mathrm{FFT}\left\{a_k[n]\right\} \cdot \mathrm{FFT}\left\{b[n]\right\}\right\}$;

În cazul relațiilor (449), (451) şi (453) sunt necesare câteva operații suplimentare. Dacă durata secvenței $x[n]$ este egală cu M atunci pentru calculul unei

transformări de tipul FFT sunt necesare M $\log_2$M operaţii de înmulţire. De aceea numărul de înmulţiri necesare pentru calculul unei reprezentări timp-frecvenţă este de ordinul (N+2) M $\log_2$M. În tabelul 1.8.1 sunt prezentate exprimari ale principalelor reprezent•ri timp-frecventa favorabile pentru calculul acestor reprezentari cu ajutorul algoritmului FFT.

Transformarea Fourier scurta	$x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} * w^{\vee}[n]\ ,\ k = \overline{0, N-1}$
Spectrograma	$\left\| x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} * w^{\vee}[n] \right\|^2\ ,\ k = \overline{0, N-1}$
Functia de incertitudine	$x[n]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} * x^{\vee}[n]\ ,\ k = \overline{0, N-1}$
Wigner-Ville	$e^{2jk\frac{2\pi}{N}n}\left(x[2n]\, e^{-j4k\frac{2\pi}{N}n} * x^{*}[2n] \right),\ k = \overline{0, N-1}$
"wavelet"	$\sqrt{k\frac{2\pi}{N}}\, x[n] * \psi^{\vee}\left(k\frac{2\pi}{N}\, n \right),\ k = \overline{1, N}$
Scalograma	$\left(\sqrt{k\frac{2\pi}{N}} \right) \left\| x[n] * \psi^{\vee}\left(k\frac{2\pi}{N}\, n \right) \right\|^2\ ,\ k = \overline{1, N}$

Tabelul 1.8.1 Exprimări alternative ale reprezentărilor timp-frecvenţă discrete.

În unele cazuri se poate profita de structura particulară a unei reprezentări timp-frecvenţă pentru ca reprezentarea să poate fi calculată efectuând un număr mai mic de operaţii. De exemplu $TF_x^{STFT}[n,k]$ poate fi privită ca şi transformata Fourier discretă a semnalului $x[k]\, w[k-n]$ pentru fiecare valoare a lui *n*. Alţi algoritmi pentru calculul reprezentărilor timp-frecvenţă în timp discret sunt prezentaţi în [13]. În [14], se prezintă metode de utilizare a algoritmului FFT la calculul reprezentărilor timp-frecvenţă biliniare. Toţi aceşti algoritmi au condus, la elaborarea unei biblioteci de programe, intitulată TFSA, [14]. Pentru calculul reprezentării timp-frecvenţă de tip "wavelet" poate fi utilizat algoritmul lui Mallat. Acesta este mai rapid decât algoritmul FFT.

8.2 CALCULUL REPREZENTĂRII TIMP-FRECVENȚĂ DE TIPUL TRANSFORMARE "WAVELET" CONTINUĂ FOLOSIND ALGORITMUL LUI MALLAT

Folosind notația:

$$C_{m,n} = TF_x^{CWT}[m,n] = \langle x(\tau), \psi^*_{m,n}(\tau) \rangle \tag{457}$$

reprezentarea $TF_x^{CWT}(t,\omega)$ poate fi aproximată prin interpolarea bidimensională:

$$TF_x^{CWT}(t,\omega) \cong \sum_m \sum_n C_{m,n}\, \alpha_{n,m}(t,\omega) \tag{458}$$

unde $\alpha_{n,m}(t,\omega)$ sunt funcțiile de interpolare. Dar, se poate scrie:

$$d_{m,k} = \langle x(\tau), \psi_{m,k}(\tau) \rangle \tag{459}$$

Deci pentru funcții "wavelet" reale este valabilă relația:

$$C_{m,n} = d_{m,n} \tag{460}$$

Dar coeficienții $d_{m,n}$ pot fi obținuți cu ajutorul algoritmului lui Mallat. De aceea acest algoritm poate fi folosit la calculul reprezentării $TF_x^{CWT}(t,\omega)$.

8.2.1 INIȚIALIZAREA ALGORITMULUI LUI MALLAT

Problema care apare este una de inițializare. Într-adevăr, algoritmul lui Mallat pornește de la coeficienții descompunerii semnalului $x_o(\tau)$ (proiecția lui $x(\tau)$ pe spațiul V_o), $a_{o,n}$, în baza spațiului V_o. În consecință, pentru determinarea coeficienților $C_{m,n}$, este necesară cunoașterea coeficienților $a_{o,n}$. După cum s-a arătat în paragraful 7.1.2.7, dacă funcția "wavelets mother" are primele *p* momente nule atunci pentru calculul coeficienților $a_{o,n}$ se poate folosi formula:

$$a_{o,n} = \langle x_o(\tau), \varphi(\tau - n) \rangle \cong x_o[n] \tag{461}$$

Dacă semnalul de analizat, $x(\tau)$, este element al lui V_o, atunci pentru inițializarea algoritmului lui Mallat se poate folosi relația:

$$a_{o,n} \cong x[n] \tag{462}$$

Aproximarea este cu atât mai bună cu cât valoarea lui *p* este mai mare, şi cu cât semnalul de analizat este mai "neted".

Nu întotdeauna se face analiza timp-frecvenţă a unor semnale netede. Alteori nu se poate utiliza pentru analiză o funcţie de tipul "wavelets mother" cu destule momente nule. În sfârşit există situaţia în care semnalul $x(\tau)$ nu aparţine spaţiului V_o. În continuare se caută soluţii pentru iniţializarea algoritmului lui Mallat pentru aceste cazuri. În acest scop se caută răspunsul la impuls, $h[n]$, al unui sistem liniar şi invariant în timp care să răspundă la excitaţia $x[n]$ cu semnalul $a_{o,n}$.

Folosind sistemul din figura 1.8.2.1 se obţine semnalul $a_{o,n}$ pornind de la semnalul $x(\tau)$.

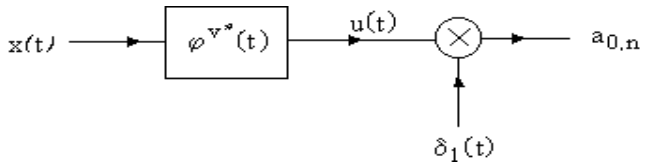


Figura 1.8.2.1 Sistem de iniţializare pentru algolritmul lui Mallat.

Într-adevăr, expresia semnalului $u(t)$ este:

$$u(t) = x(t) * \varphi^{\vee *}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \varphi^{\vee *}(t-\tau)\, d\tau$$

Prin eşantionarea semnalului $u(t)$ se obţine semnalul:

$$y(t) = \sum_{k} u[k]\ \varphi(t-k)$$

Semnalul în timp discret corespunzător este:

$$y[n] = u[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \varphi^{*}(\tau-n)\, d\tau = \langle x(\tau), \varphi(\tau-n) \rangle$$

Se constată identitatea:

$$y[n] = a_{o,n}$$

În continuare se echivalează sistemul cu răspunsul la impuls $\varphi^{\vee *}(t)$ cu un sistem în timp discret, cu răspunsul la impuls $h[n]$. Metoda de echivalare este prezentată în figura 2.8.2.1.

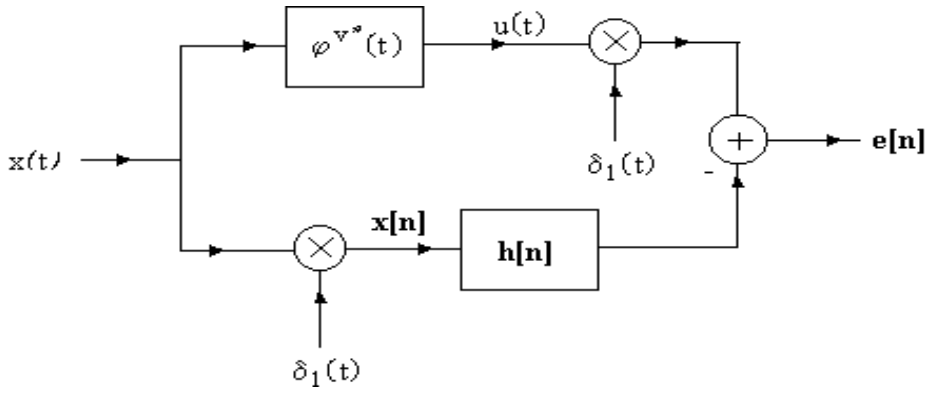


Figura 2.8.2.1 Echivalarea sistemului cu răspunsul la impuls $\varphi^{\vee *}(t)$ cu sistemul cu răspunsul la impul $h[n]$.

Condiția de echivalare este:

$$e[n] = 0, \quad (\forall)\, n \in Z$$

Notând cu F_d operatorul pentru transformarea Fourier în timp discret, ultima condiție este echivalentă cu:

$$F_d\{e[n]\}(\Omega) = 0, \quad (\forall)\, \Omega \in [-\pi, \pi] \tag{463}$$

sau:

$$F_d\{x[n]\}\ F_d\{h[n]\} = F_d\left\{x(t) * \varphi^{\vee *}(t)\Big|_{t=n}\right\}$$

În consecință:

$$h[n] = F_d^{-1}\left\{\frac{F_d\left\{x(t) * \varphi^{\vee *}(t)\Big|_{t=n}\right\}}{F_d\{x[n]\}}\right\} \tag{464}$$

La acest rezultat se ajunge şi în [128]. Deci dacă se cunoaşte expresia analitică a semnalului de analizat, $x(\tau)$, şi expresia funcţiei de scară corespunzătoare funcţiei "wavelet" care se foloseşte la calculul reprezentării timp-frecvenţă de tip transformare "wavelet" continuă atunci se poate deduce expresia lui $h[n]$ folsind relaţia (464). Folosind funcţia $h[n]$ se calculează (prin convoluţie cu $x[n]$) secvenţa $a_{o,n}$. Apoi pe baza algoritmului lui Mallat se calculează coeficienţii $C_{m,n}$, $m = -1,-M$. Cu ajutorul acestora (prin interpolare bidimensională) se determină o porţiune din $TF_x^{CWT}(t,\omega)$. Această procedură are următoarele dezavantaje:

- nu se poate aplica dacă se cunosc doar eşantionale $x[n]$ ale semnalului de analizat (fără a se cunoaşte expresia $x(\tau)$);
- convoluţia $x(t) * \varphi^{\vee *}(t)$ nu poate fi calculată numeric exact;
- există situaţii în care nu se cunoaşte expresia analitică a funcţiei de scară (de exemplu în cazul funcţiilor "wavelet" cu suport compact introduse de Ingrid Daubechies).

În continuare se prezintă două particularizări care conduc la simplificări ale relaţiei (464) ce pot fi folosite în practică cu bune rezultate.

1) Semnalul $x(\tau)$ este de bandă limitată:

$$x(\tau) \in B_\pi^2$$

În acest caz:

$$F_d^r\{x[n]\} = F\{x(\tau)\} \tag{465}$$

Indicele *r* este folosit pentru a specifica restricţia la perioada principală a transformatei Fourier în timp discret. Cu F s-a notat operatorul care descrie transformarea Fourier a semnalelor în timp continuu. Semnalul $x(t) * \varphi^{\vee}(t)$ este şi el de bandă limitată. De aceea se poate scrie:

$$F_d^r\left\{\left(x(t) * \varphi^{\vee *}(t)\Big|_{t=n}\right)\right\} = F\{x(t)\}\, F\left\{\varphi^{\vee *}(t)\right\} p_\pi(\omega) \tag{466}$$

Ţinând seama de relaţiile (465) şi (466) relaţia (464) devine:

$$h[n] = F_d^{-1}\left\{\frac{F\{x(t)\}\, F\left\{\varphi^{\vee *}(t)\right\} p_\pi(\omega)}{F\{x(t)\}}\right\} = F_d^{-1}\left\{F\left\{\varphi^{\vee *}(t)\right\} p_\pi(\omega)\right\} \tag{467}$$

2.) Daca se face si ipoteza suplimentara ca functia de scara este de banda limitata:

$$\varphi^{\vee *}(t) \in B_{\pi}^{2}$$

(este normal să se analizeze semnale de bandă limitată folosind funcții de scară de bandă limitată), atunci:

$$F_d^r\left\{\varphi^{\vee *}[n]\right\} = F\left\{\varphi^{\vee *}(t)\right\}$$

Relația (466) devine:

$$F_d^r\left\{\left(x(t) * \varphi^{\vee *}(t)\Big|_{t=n}\right)\right\} = F_d^r\{x[n]\}\ F_d^r\left\{\varphi^{\vee *}[n]\right\}$$

iar relația (467) se mai scrie:

$$h[n] = F_d^{-1}\left\{F_d^r\left\{\varphi^{\vee *}[n]\right\}\right\} = \varphi^{\vee *}[n] \qquad (468)$$

În acest caz sistemul în timp discret cu răspunsul la impuls $h[n]$ a fost obținut prin echivalarea sistemului cu răspuns la impuls $\varphi^{\vee *}(t)$ pe baza metodei de echivalare care presupune invarianța răspunsului la impuls [114].

În cazul 1) sistemul în timp discret obținut este echivalent cu sistemul în timp continuu cu răspunsul în frecvență $F\left\{\varphi^{\vee *}(t)\right\} p_{\pi}(\omega)$ pe baza aceleiaşi metode de echivalare.

Relația (467) este propusă ca soluție a problemei inițializării algoritmului lui Mallat în [146].

Relația (468) este propusă ca soluție a problemei inițializării algoritmului lui Mallat în [120], (relația (15) pentru $x(t) = \delta(t)$) şi în [1].

Orice funcție de scară cu suport compact este de bandă nelimitată. De aceea relația (468) reprezintă doar o soluție aproximativă pentru inițializarea algoritmului lui Mallat.

Multe semnale nestaționare, de analizat, $x(\tau)$ sunt de bandă nelimitată. De aceea şi relația (467) reprezintă doar o soluție aproximativă pentru problema inițializării.

În [146] se propune utilizarea filtrării adaptive pentru rezolvarea problemei inițializării algoritmului lui Mallat.

8.2.2 IMPLEMENTAREA ALGORITMULUI LUI MALLAT

În continuare se prezintă o modalitate de implementare a algoritmului lui Mallat cu ajutorul unui exemplu. Dacă secvența de intrare $a_{0,n}$ este de durată limitată atunci algoritmul lui Mallat poate fi descris cu ajutorul algebrei matricilor. Fie de exemplu secvența de intrare descrisă de vectorul:

$$a_0 = \left[a_{0,8}, a_{0,7}, \ldots, a_{0,1}\right]$$

Dacă se folosesc filtre cu răspunsurile la impuls $m_0[n]$ şi $m_1[n]$ de durată egală cu 4 (de exemplu filtrele DAU2), atunci, [4], primul pas al algoritmului lui Mallat poate fi descris cu ajutorul ecuației matriciale:

$$Y_1 = M_0 \cdot X_0 \text{ cu } X_0 = a_0 \text{ şi}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} m_0'[0] & m_0'[1] & m_0'[2] & m_0'[3] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_0'[3] & m_0'[2] & -m_0'[1] & m_0'[0] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0'[0] & m_0'[1] & m_0'[2] & m_0'[3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_0'[3] & m_0'[2] & -m_0'[1] & m_0'[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_0'[0] & m_0'[1] & m_0'[2] & m_0'[3] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_0'[3] & m_0'[2] & -m_0'[1] & m_0'[0] \\ m_0'[2] & m_0'[3] & 0 & 0 & 0 & 0 & m_0'[0] & m_0'[1] \\ -m_0'[1] & m_0'[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_0'[3] & m_0'[2] \end{bmatrix} \quad (469)$$

cu: $m_0'[n] = \sqrt{2}\, m_0[n]$.

Într-adevăr, se constată că:

$$Y_1^T = \left[a_{-1,4}\ d_{-1,4}\ a_{-1,3}\ d_{-1,3}\ a_{-1,2}\ d_{-1,2}\ a_{-1,1}\ d_{-1,1}\right] \quad (470)$$

Înmulțirea primei linii din matricea M_0 cu vectorul X_0, descrie convoluția:

$$a_{0,n} * m_0'[n]$$

Înmulțirea celei de a doua linii din matricea M_0 cu vectorul X_0, descrie convoluția:

$$a_{0,n} * m_1'[n]$$

S-a folosit relația:

$$m_1'[n] = (-1)^{n+1} m_0[L-1-n]$$

unde L reprezintă durata secvenței $m_0[n]$. Permutând elementele acestui vector se obține:

$${}_pY_1^T = \left[a_{-1,4}\ a_{-1,3}\ a_{-1,2}\ a_{-1,1}\ d_{-1,4}\ d_{-1,3}\ d_{-1,2}\ d_{-1,1}\right] \tag{471}$$

Decimarea cu 2 este descrisă prin alternarea elementelor în vectorul ${}_pY_1^T$. Elementele vectorului ${}_pY_1$ reprezintă secvențele $a_{-1,n}$ și $d_{-1,n}$.

Separându-le se obțin vectorii:

$$\begin{cases} X_{11}^T = \left[a_{-1,4}\ a_{-1,3}\ a_{-1,2}\ a_{-1,1}\right] \\ X_{12}^T = \left[d_{-1,4}\ d_{-1,3}\ d_{-1,2}\ d_{-1,1}\right] \end{cases} \tag{472}$$

Fie M_1 matricea care reprezintă colțul din stânga sus al matricii M_o:

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_0'[0] & m_0'[1] & m_0'[2] & m_0'[3] \\ -m_0'[3] & m_0'[2] & -m_0'[1] & m_0'[0] \\ 0 & 0 & m_0'[0] & m_0'[1] \\ 0 & 0 & -m_0'[3] & m_0'[2] \end{bmatrix} \tag{473}$$

Cel de-al doilea pas al algoritmului lui Mallat este descris de relația:

$$Y_2 = M_1 \cdot X_{11} \tag{474}$$

Rezultatul este:

$$Y_2^T = \left[a_{-2,2}\ d_{-2,2}\ a_{-2,1}\ d_{-2,1}\right] \tag{475}$$

Prin permutări rezultă:

$${}_pY_2^T = \left[a_{-2,2}\ a_{-2,1}\ d_{-2,2}\ d_{-2,1}\right] \tag{476}$$

Separând elementele secvențelor $a_{2,n}$ și $d_{2,n}$ se obțin vectorii:

$$\begin{cases} X_{21}^{T} = \left[a_{-2,2} \;\; a_{-2,1} \right] \\ X_{22}^{T} = \left[d_{-2,2} \; d_{-2,1} \right] \end{cases} \tag{477}$$

Folosind vectorii ${}_{p}Y_{1}^{T}$ şi ${}_{p}Y_{2}^{T}$ se obţin vectorul rezultat:

$$Y^{T} = \left[a_{-2,2} \;\; a_{-2,1} \;\; d_{-2,2} \;\; d_{-2,1} \, d_{-1,4} \;\; d_{-1,3} \;\; d_{-1,2} \;\; d_{-1,1} \right] \tag{478}$$

Acesta reprezintă rezultatul aplicării transformării "wavelet" discretă semnalului descris de vectorul X_o.

Algoritmul de calcul al transformării "wavelet" discretă inversă constă în aplicarea în ordine inversă a operaţiilor prezentate mai sus. Bineînţeles în acest caz în locul matricilor M_o, M_1, ... trebuiesc folosite matricile $\tilde{M}_{o}^{T}$, $\tilde{M}_{1}^{T}$, ...

Această metodă de implementare a algoritmului lui Mallat este descrisă şi în [115]. Revenind la relaţia (469) se constată că matricea M_o a fost construită după următoarele reguli:

- Linia I conţine coeficienţii filtrului cu răspunsul la impuls $m_o'[n]$, completaţi cu zerouri până când dimensiunea liniei devine egală cu durata secvenţei $a_{o,n}$(să spunem că această durată este N).

- Linia a II-a conţine coeficienţii filtrului cu răspunsul la impuls $m_1'[n]$, la care se adaugă zerouri după regula de la linia I. Atât $m_o'[n]$ cât şi $m_1'[n]$ descriu sisteme cauzale. Această ipoteză nu afectează calculul transformării "wavelet" discrete dacă se folosesc funcţii "wavelet" ortogonale sau biortogonale (datorită faptului că elementele bazelor de funcţii "wavelet" se construiesc prin translatare cu întregi).

- Restul liniilor pare se construiesc prin recircularea elementelor liniei pare anterioare folosind un pas de deplasare de valoare 2.

- La fel pentru liniile impare.

Pe baza relaţiilor (469) şi (470) se constată că:

$$\begin{cases} a_{-1,1} = m_o'[2]\, a_{0,8} + m_o'[3]\, a_{0,7} + m_o'[0]\, a_{0,2} + m_o'[1]\, a_{0,1} \\ d_{-1,1} = -m_o'[1]\, a_{0,8} + m_o'[0]\, a_{0,7} - m_o'[3]\, a_{0,2} + m_o'[2]\, a_{0,1} \end{cases} \tag{479}$$

Pe baza relaţiilor care stau la baza construcţiei algoritmului lui Mallat se poate scrie, pentru m = 1 şi k = 1:

$$\begin{cases} a_{-1,1} = m_o'[2]\, a_{0,4} + m_o'[3]\, a_{0,5} + m_o'[0]\, a_{0,2} + m_o'[1]\, a_{0,3} \\ d_{-1,1} = m_1[2]\, a_{0,4} + m_1[3]\, a_{0,5} + m_1[0]\, a_{0,2} + m_1[1]\, a_{0,3} \end{cases} \quad (480)$$

Pe baza relațiilor (479) şi (480) se constată că ultimele două elemente ale vectorului Y_1^T sunt eronate deoarece la începutul ultimelor două linii ale matricii M_o apar elemente nenule. În consecință se poate afirma că metoda propusă pentru implementarea algoritmului lui Mallat are erori. De fapt aplicând semnalului $a_{o,n}$ transformarea descrisă, bazată pe folosirea matricilor M_o, M_1, ... se obține un semnal ${}_o y[n]$ (corespunzător vectorului Y^T) diferit de semnalul $y_o[n]$ din paragraful 7.1.2.6. Prin aplicarea transformării inverse (bazată pe folosirea matricilor $\tilde{M}_o^T$, $\tilde{M}_1^T$, ...) semnalului ${}_o y[n]$ se obține exact semnalul $a_{o,n}$. Aceste erori pot fi diminuate dacă se consideră că matricea M_o este diagonală (deci dacă se înlocuiesc cu 0 primele două elemente de pe ultimile 2 linii). Se spune că metoda de implementare matricială a algoritmului lui Mallat "are probleme" la margini. Aceste probleme apar datorită faptului că relația (469) descrie de fapt convoluții circulare pe când în structura sistemului din figura 2.7.1.2.5 (care prezintă o implementare perfectă a algoritmului lui Mallat) apar filtre numerice obişnuite (a căror funcționare este descrisă de convoluția obişnuită). Se poate afirma că metoda matricială propusă descrie corect funcționarea sistemului din figura 2.7.1.2.5 în regim permanent şi că problemele la margini apar datorită descrierii neadecvate a regimului tranzitoriu al sistemului considerat. O altă interpretare a problemelor la margini este următoarea. În cazul metodei matriciale descrise, la fiecare iterație numărul eşantioanelor se înjumătățeşte (vectorul Y_1 are 8 elemente iar vectorul Y_2 are 4 elemente), dar nu depinde de durata răspunsului la impuls $m_o[n]$, L. În cazul sistemului din figura 2.7.1.2.5, semnalele $d_{-1}[n]$ şi $a_{-1}[n]$ au durate egale cu (N+L)/2, pe când în cazul metodei matriciale duratele acestor semnale sunt egale cu N/2. Această observație sugerează necesitatea prelungirii secvenței $a_{o,n}$ în cazul aplicării metodei matriciale. Dacă secvenței $a_{o,n}$ i se concatenează două secvențe ${}_1a_{o,n}$ şi ${}_2a_{o,n}$ de lungime L/2, una înainte (${}_1a_{o,n}$) şi una după (${}_2a_{o,n}$) atunci se obține o nouă secvență ${}_{nou}a_{o,n} = \{{}_1a_{o,n}, a_{o,n}, {}_2a_{o,n}\}$ de lungime N+L. Dacă acestei secvențe i se aplică o iterație conform metodei matriciale, atunci se obțin semnalele $d_{-1}[n]$ şi $a_{-1}[n]$ de durate (N+L)/2.

Prin alegerea corespunzătoare a eşantioanelor ${}_1a_{o,n}$ şi ${}_2a_{o,n}$ s-ar putea realiza compatibilizarea dintre metoda matricială şi algoritmul lui Mallat. Dacă sunt necesare mai multe iterații în algoritmul lui Mallat (de exemplu M) atunci lungimea secvențelor ${}_1a_{o,n}$ şi ${}_2a_{o,n}$ trebuie să fie mai mare.

Într-adevăr, în cazul semnalului din figura 2.7.1.2.5, semnalele $d_{-2}[n]$ şi $a_{-2}[n]$ au durate egale cu: $\left(\frac{N+L}{2}+L\right)\Big/2 = \frac{N}{4}+\frac{L}{2}+\frac{L}{4}$ iar semnalele $d_{-M}[n]$ şi $a_{-M}[n]$ au durate egale cu:

$$\frac{N}{2^M}+\frac{L}{2}+\frac{L}{2^2}+\ldots+\frac{L}{2^M}=\frac{N}{2^M}+\frac{L}{2^M}\left(1+2+\ldots+2^{M-1}\right)=$$

$$=\frac{N}{2^M}+\frac{L}{2^M}\frac{2^M-1}{2-1}=\frac{N}{2^M}+\frac{2^M-1}{2^M}L\cong\frac{N}{2^M}+L$$

Deci dacă se fac M iteraţii atunci lungimea secvenţelor ${}_1a_{o,n}$ şi ${}_2a_{o,n}$ trebuie să fie egală cu $\frac{2^M-1}{2^{M+1}}L$. În acest caz noua secvenţă ${}_{nou}a_{o,n}$ ar avea lungimea $N+\frac{2^M-1}{2^M}L$. Prin alegerea corespunzătoare a eşantioanelor acestei secvenţe s-ar putea realiza compatibilizarea dintre metoda matricială şi algoritmul lui Mallat. Această alegere presupune rezolvarea unui sistem de $\left(1\text{-}2^{-M}\right)L$ necunoscute. La valori mari ale lui L rezolvarea unui astfel de sistem presupune consumul unui timp de calcul însemnat. Se observă similitudinea cu subparagraful C) din paragraful 7.1.2.9. În acest subparagraf au fost sugerate metode elementare pentru scăderea erorilor la margini: 1) periodizarea semnalului $a_{o,n}$ cu perioada N, 2) simetrizarea semnalului $a_{o,n}$, faţă de momentele n = 0 şi n = N. Aceste metode sunt descrise în [5]. În aceeaşi lucrare este descrisă şi o modalitate de calcul pe blocuri a transformării "wavelet" discretă a unui semnal în timp discret. Dacă valoarea lui N este foarte mare atunci metoda matricială de implementare a algoritmului lui Mallat este laborioasă. De aceea în astfel de situaţii se preferă împărţirea în blocuri de lungime rezonabilă (de exemplu 256) a secvenţei $a_{o,n}$. Evident la capetele fiecărui bloc vor apărea probleme la margini. Acestea se pot împărţi în două tipuri: interne (care apar la capetele unor blocuri vecine), externe (care apar la stânga primului bloc şi la dreapta ultimului bloc). Problemele la margini interne pot fi rezolvate cu metoda "overlap and save" descrisă în [106]. Efectele la marginile externe pot fi diminuate prin periodizare sau prin simetrizare. Trebuie remarcat că metoda matricială de implementare a algoritmului lui Mallat este foarte rapidă. Ea necesită pentru M iteraţii ale algoritmului lui Mallat un număr de:

$$NL+\frac{N}{2}L+\ldots+\frac{N}{2^M}L=\frac{NL}{2^M}\frac{2^{M+1}-1}{2-1}=NL\frac{2^{M+1}-1}{2^M}\cong 2NL$$

înmulţiri. Se constată că pentru filtre scurte (L mic), transformarea "wavelet" discretă este mai rapidă decât FFT. Totuşi algoritmul lui Mallat poate fi implementat şi folosind alte metode mai rapide. Acestea sunt prezentate în capitolul 6 din [122].

8.2.3 ALGORITMUL LUI MALLAT ÎN CAZUL SEMNALELOR BIDIMENSIONALE

În [90] Stephane Mallat extinde reprezentarea ortogonală bazată pe funcţii "wavelet" la cazul imaginilor. Acesta este un caz particular al subparagrafului A) din paragraful 7.1.2.9. O analiză multirezoluţie a spaţiului $L^2(R^2)$ este generată cu ajutorul funcţiei de scară:

$$\varphi(\tau_1, \tau_2) = \varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2) \tag{481}$$

Funcţiile "wavelet" ataşate au expresiile:

$$\begin{cases} \psi_1(\tau_1, \tau_2) = \varphi(\tau_1)\psi(\tau_2) \\ \psi_2(\tau_1, \tau_2) = \psi(\tau_1)\varphi(\tau_2) \\ \psi_3(\tau_1, \tau_2) = \psi(\tau_1)\psi(\tau_2) \end{cases} \tag{482}$$

unde funcţiile $\varphi(\tau)$ şi $\psi(\tau)$ generează o analiză multirezoluţie ortogonală şi descompunerea corespunzătoare ei.

Mulţimea :

$$\left\{2^{-m}\psi_1\left(\tau_1 - 2^{-m}p,\ \tau_2 - 2^{-m}n\right),\ 2^{-m}\psi_2\left(\tau_1 - 2^{-m}p,\ \tau_2 - 2^{-m}n\right),\right.$$
$$\left. 2^{-m}\psi_3\left(\tau_1 - 2^{-m}p,\ \tau_2 - 2^{-m}n\right)\right\}_{(m,\,n,\,p)\,\in Z^3}$$

formează o bază ortonormală a spaţiului $L^2(R^2)$.

Funcţia $\varphi(\tau)$ generează analiza multirezoluţie a lui $L^2(R)$, $\{V_m\}_{m\in Z}$. Funcţia $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ generează analiza multirezoluţie $\{{}_2V_m\}_{m\in Z}$ a spaţiului $L^2(R^2)$:

$${}_2V_m = V_m \otimes V_m$$

Cu $\otimes$ s-a notat produsul tensorial. Notând cu:

$$\varphi_m(\tau_1, \tau_2) = 2^{2m}\varphi(2^m\tau_1,\ 2^m\tau_2) \tag{483}$$

se poate afirma ca familia de funcții $\left\{2^{-m}\varphi_m\left(\tau_1 - 2^{-m}n,\ \tau_2 - 2^{-m}p\right)\right\}_{(m,\,p)\,\in Z^2}$ formează o bază ortonormală a lui ${}_2V_m$. Aproximarea semnalului $x(\tau_1, \tau_2)$ de rezoluție *m* este caracterizată de produsele scalare:

$$A_m x = \left\langle x(\tau_1, \tau_2), \varphi_m\left(\tau_1 - 2^{-m} n\right)\, \varphi_m\left(\tau_2 - 2^{-m} n\right)\right\rangle \tag{484}$$

Diferența dintre aproximările $A_{m+1}x$ și $A_m x$ reprezintă proiecțiile semnalului $x(\tau_1, \tau_2)$ pe spațiile generate de bazele ortonormale:

$$\left\{2^{-m}\psi_1\left(\tau_1 - 2^{-m}\,p,\ \tau_2 - 2^{-m}n\right)\right\}_{(n,\,p)\,\in Z^2},$$

$$\left\{2^{-m}\psi_2\left(\tau_1 - 2^{-m}\,p,\ \tau_2 - 2^{-m}n\right)\right\}_{(n,\,p)\in Z^2} \quad \text{și}$$

$$\left\{2^{-m}\psi_1\left(\tau_1 - 2^{-m}\,p,\ \tau_2 - 2^{-m}n\right)\right\}_{(n,\,p)\,\in Z^2}.$$

Această diferență este dată de următoarele 3 imagini de detaliu:

$$D_m^1 x = \left\{\left\langle x(\tau_1,\ \tau_2),\ \psi_1\left(\tau_1 - 2^{-m}n,\ \tau_2 - 2^{-m}p\right)\right\rangle\right\}_{(n,\,p)\,\in Z^2}$$

$$D_m^2 x = \left\{\left\langle x(\tau_1,\ \tau_2),\ \psi_2\left(\tau_1 - 2^{-m}n,\ \tau_2 - 2^{-m}p\right)\right\rangle\right\}_{(n,\,p)\,\in Z^2} \tag{485}$$

$$D_m^3 x = \left\{\left\langle x(\tau_1,\ \tau_2),\ \psi_3\left(\tau_1 - 2^{-m}n,\ \tau_2 - 2^{-m}p\right)\right\rangle\right\}_{(n,\,p)\,\in Z^2}$$

Relația (482) arată că pentru generarea funcțiilor $\psi_k(\tau_1, \tau_2)$ $k = 1, 2, 3$, se folosesc filtrele cu răspunsurile în frecvență:

$$m_{01}(\omega_1, \omega_2) = m_0(\omega_1)m_1(\omega_2)$$

$$m_{10}(\omega_1, \omega_2) = m_1(\omega_1)m_0(\omega_2) \tag{486}$$

$$m_{11}(\omega_1, \omega_2) = m_1(\omega_1)m_1(\omega_2)$$

Pentru orice M > 0, imaginea $A_0 x$ este complet descrisă de 3M+1 imagini discrete:

$$\left\{A_{-M}\, x, D_m^1 x, D_m^2 x, D_m^3 x\right\}_{-M \le m \le -1}$$

Descompunerea secvenței $A_{m+1} x$ cu ajutorul secvențelor $A_m x$, $D_m^1 x$ şi $D_m^2 x$ este realizată cu ajutorul sistemului din figura 1.8.2.3.

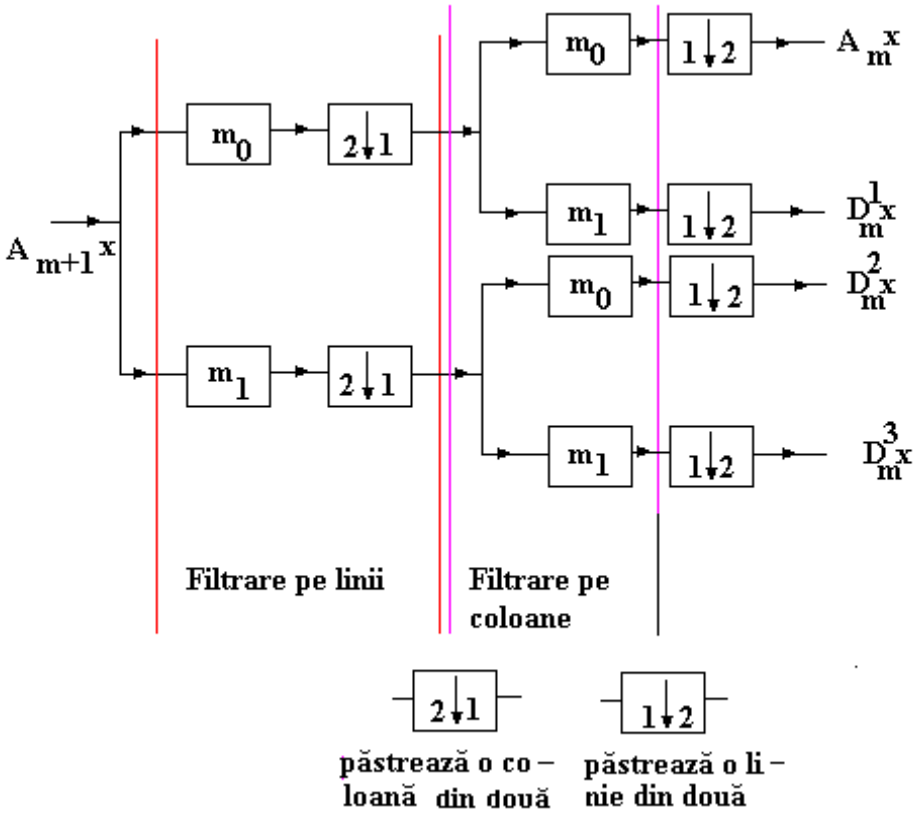


Figura 1.8.2.3 Sistem pentru implementarea unei iterații în algoritmul lui Mallat în cazul bidimensional.

Transformarea inversă transformării prezentate în figura 1.8.2.3 este prezentată în figura 2.8.2.3.

Sistemele din figurile 1.8.2.3 şi 2.8.2.3 pot fi folosite la descompunerea unei imagini pe baza algoritmului lui Mallat respectiv la reconstrucția perfectă a acelei imagini.

Transformările din figurile 1.8.2.3 şi 2.8.2.3 pot fi implementate cu metoda matricială descrisă în paragraful anterior.

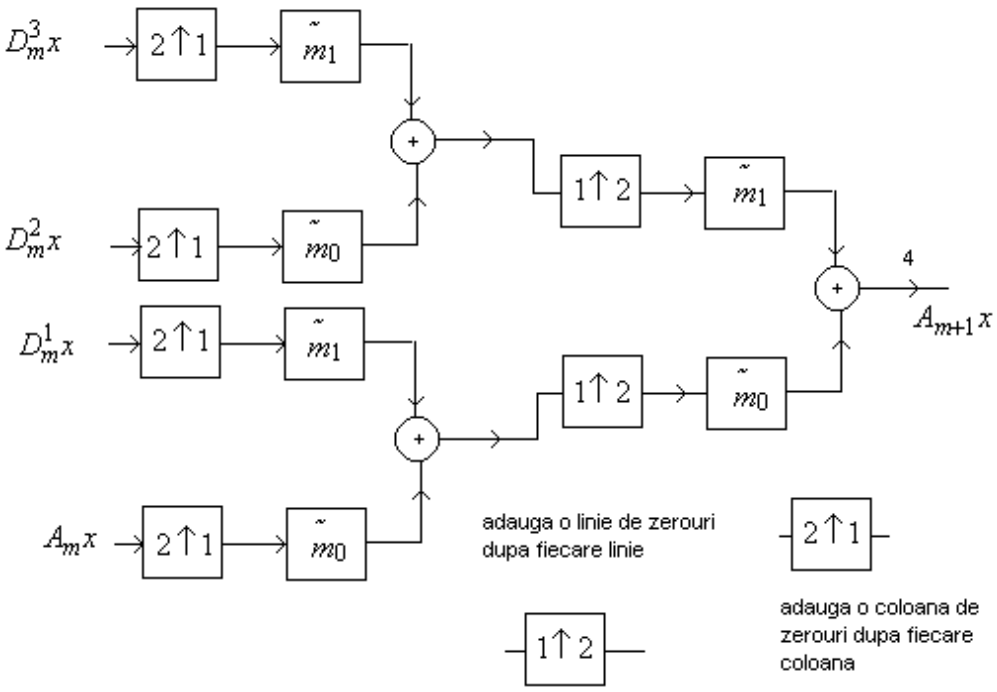


Figura 2.8.2.3 Sistem pentru calculul transformării "wavelet" discretă inversă, în cazul bidimensional (cazul unei singure iterații).

8.3 ALGORITMI PENTRU ANALIZA TIMP-FRECVENŢĂ A SEMNALELOR NESTAŢIONARE FOLOSIND PACHETE DE FUNCŢII "WAVELET"

Algoritmul lui Mallat în forma sa modificată, descrisă în exemplul din figura 2.7.1.2.9 poate fi utilizat pentru a se efectua o astfel de analiză.

În general analiza cu pachete de funcţii "wavelet" este perfect recursivă. Fiecare secvenţă de coeficienţi nou calculată devine rădăcina propriului său arbore de analiză. Cantitatea de informaţie stocată în fiecare nod al structurii de date poate fi specificată de contorul programului de analiză cu pachete de funcţii "wavelet".

La sfârşit trebuie stocată lista coeficienţilor obţinuţi prin analiza efectuată. Orice altă informaţie poate fi memorată în tabele sau poate fi calculată cu ajutorul câtorva parametri de bază cum ar fi durata semnalului de analizat sau numărul de iteraţii ales pentru analiza respectivă (adâncimea analizei). Este indicat să se utilizeze structuri de date pentru spaţiile de coeficienţi Λ_{sf} care să conţină informaţii despre durata secvenţei de prelucrat, lista coeficienţilor deja calculaţi şi informaţii despre cele două subspaţii imediat descendente.

Ordinograma unei porţiuni dintr-un algoritm de analiză cu pachete de funcţii "wavelet" este prezentată în figura 1.8.3.

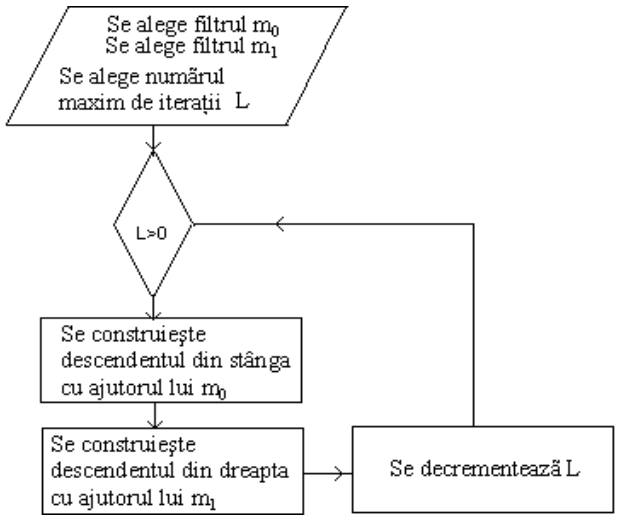

Se alege filtrul m_0
Se alege filtrul m_1
Se alege numărul maxim de iteraţii L
L>0
Se construieşte descendentul din stânga cu ajutorul lui m_0
Se construieşte descendentul din dreapta cu ajutorul lui m_1
Se decrementează L

Figura 1.8.3 Ordinograma unei porţiuni dintr-un algoritm de analiză cu pachete de funcţii "wavelet"

Pentru ca analiza descrisă în figura 1.8.3 să fie completă ar trebui să se construiască toţi descendenţii nodurilor de pe un anumit nivel (corespunzător unei valori a lui L nenule). Pentru aceasta ar fi necesar să se introducă în buclă o nouă variabilă care să indexeze aceste noduri. Decrementarea lui L ar trebui să aibă loc abia după ce această nouă variabilă şi-ar fi atins, prin incrementări repetate, valoarea maximă (care este o funcţie de valoare curentă a lui L).

Coeficienţii pachetului de funcţii "wavelet" reprezintă rezultatul analizei prezentate în figura 1.8.3. Ei reprezintă valori de eşantioane cu semnificaţia de amplitudini indexate după scară, frecvenţă şi poziţie. Aceşti coeficienţi trebuie memoraţi într-o anumită zonă de memorie, fiecărui coeficient corespunzându-i o locaţie care trebuie să conţină pe lângă valoarea sa şi alte informaţii cum ar fi nodul părinte şi nivelul de iteraţie atins.

Subprograme de analiză cu pachete de funcţii "wavelet" sunt prezentate în [145]. Pentru a reconstrui semnalul (descompus în cea mai bună bază) sunt necesare două categorii de informaţie :

- descrierea bazei;
- valorile coeficienţilor descompunerii semnalului în aceea bază.

Folosind tehnica descrisă se obţin librării de atomi timp-frecvenţă. Cea mai bună bază poate fi găsită reunind clase de astfel de atomi. Pentru a găsi cea mai bună bază, aşa cum s-a prezentat în paragraful 7.1.2.10, trebuie minimizată una dintre funcţiile de cost.

Funcţia de cost trebuie să fie aleasă la începutul procedurii. Algoritmul de căutare are o structură recursivă. La fiecare iteraţie se compară costul de informaţie al nodului părinte cu suma costurilor de informaţie ale nodurilor copii.

Dacă costul de informaţie al structurii de date părinte este inferior costului de informaţie al oricărei structuri de date descendent, atunci nivelul acelui nod este adăugat la descrierea prin nivele a celei mai bune baze, conţinutul acelui nod este adăugat la zona de înregistrare a nodurilor şi descrierea anterioară a celei mai bune baze de dedesubtul acelui nod este ştearsă. Apoi se trece la nivelul inferior. Un program de implementare a unei astfel de subrutina este prezentat în [145].

În aceeaşi carte, în capitolul 10 se prezintă generalizări ale noţiunii de pachete de funcţii "wavelet" în cazul semnalelor multidimensionale.

După cum s-a văzut în paragraful 7.1.2.10, folosind tehnici de căutare a celei mai bune baze prin minimizarea unei funcţionale de cost, poate fi găsită baza optimă pentru descompunerea unui semnal dat. Toate funcţionalele de cost prezentate în paragraful 7.1.2.10 erau aditive. Dacă se folosesc funcţionale neaditive atunci pot fi găsite baze suboptimale folosind algoritmi mai rapizi [135]. Carl Taswell a construit astfel de algoritmi şi i-a comparat cu algoritmii care conduc la cea mai bună bază. O astfel de comparaţie este prezentată în [136].

8.4 PROGRAME PENTRU ANALIZA TIMP-FRECVENȚĂ

Există mai multe "produse soft" destinate analizei timp-frecvență. În continuare se prezintă pe scurt câteva dintre aceste programe.

8.4.1 PROGRAMUL JTFA

Programul JTFA (Joint Time-Frequency Analyzer) este un instrument "soft", dezvoltat de firma National-Instruments, în acord cu gama de sisteme de achiziții de date pe care o produce această firmă. De fapt acest analizor este unul dintre instrumentele virtuale pe care le-au conceput specialiștii de la această firmă, [103]. Acest program a fost utilizat pentru ilustrarea lucrării [117]. El este special conceput pentru calculatoare de tip PC.

Semnalul de analizat poate fi achiziționat printr-un sistem de achiziții de date sau generat numeric. În cel de al doilea caz, înainte de analiză, semnalul $x(\tau)$ trebuie depus în directorul DATA din "current file". În figura 1.8.4.1 este prezentat panoul frontal al analizorului.

Se constata ca pe panoul frontal exista trei ferestre de tip ecran si butoane de comanda si control. Pe ecranul principal (cel cu dimensiunile cele mai mari) se afiseaza reprezentarea timp-frecventa, pe ecranul de sub ecranul principal se afiseaza forma de unda a semnalului de analizat iar pe ecranul din dreapta ecranului principal se afiseaza densitatea spectrala de putere (sau spectrul instantaneu) a semnalului de analizat. În cazul reprezentării timp-frecvență pentru specificarea valorii într-un anumit punct se folosește un cod al culorilor prezentat în stânga ecranului principal. Valorii 0 îi corespunde albul. O cunoaștere mai precisă a valorii reprezentării timp-frecvență într-un anumit punct poate fi obținută cu ajutorul unui cursor care poate fi deplasat manual în planul timp-frecvență, cu ajutorul "joy-stick"-ului virtual din partea de jos dreapta a panoului frontal, "cursor central". Coordonata curentă *(x, y)* a cursorului şi valoarea reprezentării timp-frecvență *(z)* corespunzătoare sunt de asemenea afişate pe panoul frontal.

Deasupra ferestrei ecran din dreapta există o fereastră cu ajutorul căreia poate fi specificat tipul reprezentării frecvențiale (densitate spectrală de putere sau spectru instantaneu) care se doreste.

Cu ajutorul ferestrei din partea dreaptă jos a panoului frontal, "JFTA selector" se specifica tipul de reprezentare timp-frecvență precum şi parametrii acesteia.

Poate fi utilizată una dintre următoarele reprezentări timp-frecvență biliniară:

- spectrograma, STFT $\left(TF_x^{STFT}(t,\omega)\right)$,
- reprezentarea Wigner-Ville: WVD, $\left(TF_x^{W-V}(t,\omega)\right)$,

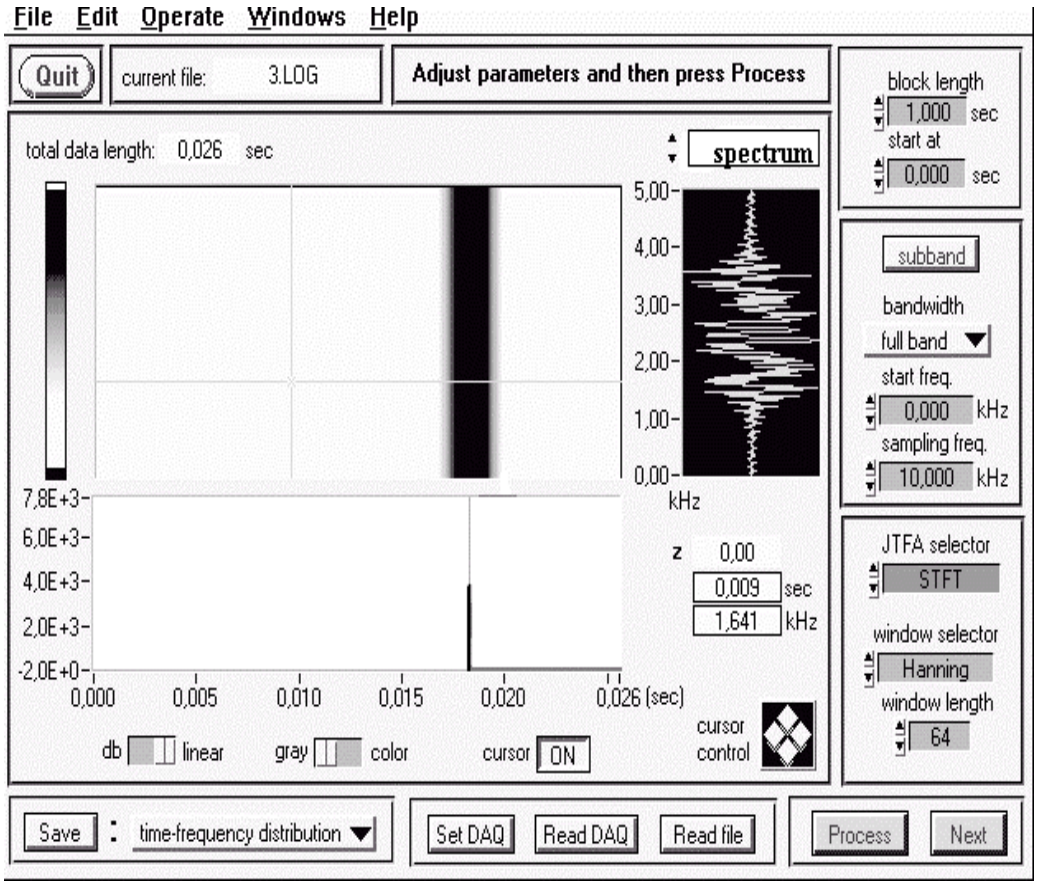


Figura 1.8.4.1. Panoul frontal al analizorului timp-frecven•• JTFA.

-reprezentarea Choi-Williams de tip serie: CWD, $\left(TFS_x^{CW}(t,\omega)\right)$,

- spectrograma Gabor adaptivă: Gabor, $\left(TF_x^{ASG}(t,\omega)\right)$,

- spectrograma adaptivă: Adaptive, $\left(TF_x^{AS}(t,\omega)\right)$,

În cazul reprezentărilor Wigner-Ville şi Choi-Williams poate fi făcută şi reprezentarea timp-frecvență a semnalului analitic asociat semnalului de analizat, dacă se apasă înaintea efectuării analizei tasta: "analytic"-ON.

În cazul spectrogramei pot fi alese câteva tipuri de fereastră: Hanning, dreptunghiulară, Blackman, Hamming. În cazul reprezentărilor CWD de tip serie se foloseşte metoda adaptivă descrisă în paragraful 7.3.1. Parametrul D poate fi ales cu ajutorul ferestrei "parameter" cu valori cuprinse între 0 şi 100. În cazul reprezentării

de tip spectrogramă Gabor adaptivă factorul α care fixează durata efectivă a ferestrei temporale poate fi ales cu ajutorul ferestrei "Gabor basis" de valoare mică, medie sau mare. Şi spectrograma Gabor este o reprezentare adaptivă, valoarea parametrului p din paragraful 7.3.1 putând fi aleasă cu ajutorul tastei "order".

Calitatea reprezentării timp-frecvenţă obţinută se apreciază cu ajutorul ferestrei "matching indicator".

Pot fi obţinute şi reprezentări mai detaliate putându-se efectua operaţia "zoom". În domeniul frecvenţă pot fi făcute reprezentări în banda $[f_{min}, f_{max}]$ folosind opţiunea "subband". Valoarea lui f_{max} poate fi modificată după cum urmează. Dacă în fereastra "bandwidth" se alege "full band", atunci f_{max} va fi egal cu jumătatea valorii afişate în fereastra "sampling freq". Dacă în fereastra "bandwidth" se alege "$1/2^n$ band", $n = \overline{1,7}$, atunci valoarea lui f_{min} poate fi impusă cu ajutorul ferestrei "start freq" iar $f_{max} = f_{min} + \frac{1}{2^{n+1}} \times$ sampling freq.

Dacă se alege obţiunea "pre-emph" atunci poate fi realizată o prefiltrare a semnalului de analizat $x[n]$. Acesta este descrisă de ecuaţia cu diferenţe finite:

$$y[n] = x[n] - factor \cdot x[n]$$

Valoarea "factor" poate fi aleasă cu ajutorul ferestrei "factor" dintre valorile 0 şi 1. Alegerea valorii 0 nu afectează analiza. Dacă se alege valoarea 1 atunci semnalul de analizat este în prealabil filtrat trece-sus.

În partea de sus-dreapta a ecranului se găsesc ferestrele: "block lenght" şi "start at" cu ajutorul carora se poate fixa durata semnalului de analizat şi momentul de la care să înceapă analiza. Deasupra ecranului destinat reprezentării timp-frecvenţă este afişată durata semnalului de analizat. Această valoare depinde de valoarea "sampling freq". Dacă valoarea sa este inferioară valorii "block lenght" atunci este analizat în întregime semnalul de intrare. În caz contrar poate fi făcut un "zoom" în domeniul timp, analiza începând de la momentul "start at".

În continuare se exemplifică câteva dintre afirmaţiile făcute în capitolele 2, 4, 6, 7. În acest caz se reia analiza semnalului folosit în exemplele din aceste capitole. Este vorba despre produsul dintre o funcţie Gaussiană şi o funcţie cosinusoidală.

Forma de undă a semnalului analizat este prezentată în figura 2.8.4.1 iar densitatea sa spectrală de putere în figura 3.8.4.1. În figurile următoare sunt prezentate diferitele sale reprezentări timp-frecvenţă. În figurile 4.8.4.1, 5.8.4.1, 6.8.4.1, 7.8.4.1 şi 8.8.4.1 sunt prezentate spectrogramele cu fereastră de tip: Hanning, Hamming, Blackmann, dreptunghiulară şi Gaussiană.

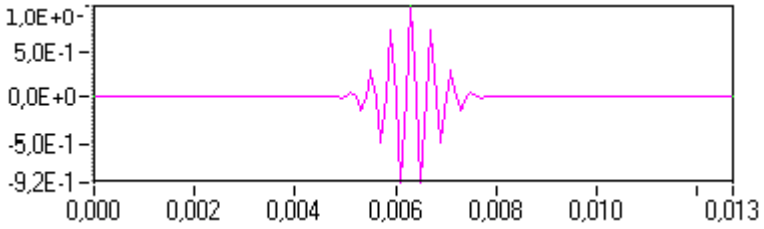


Figura 2.8.4.1. Forma de unda a semnalului de analizat.

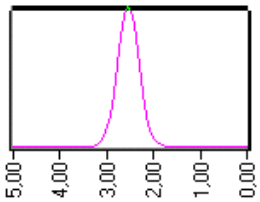


Figura 3.8.4.1. Densitatea spectrala de putere a semnalului de analizat.

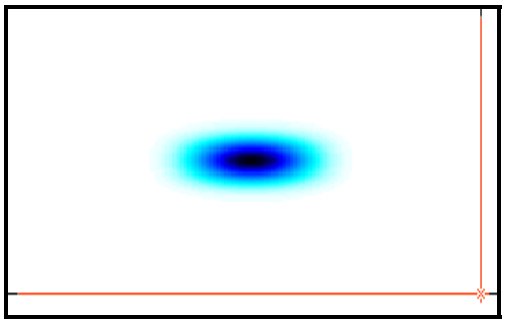


Figura 4.8.4.1. Spectrograma cu fereastra Hanning.

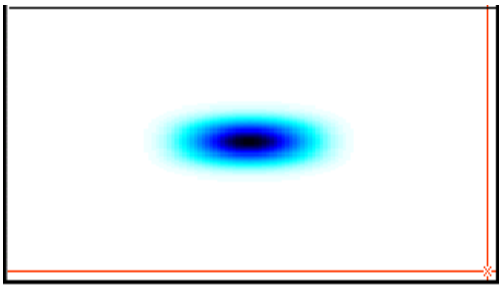


Figura 5.8.4.1. Spectrograma cu fereastra Hamming.

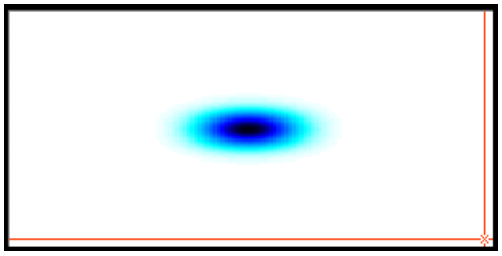


Figura 6.8.4.1. Spectrograma cu fereastra Blackmann.

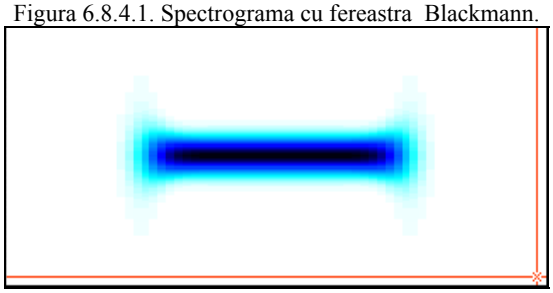


Figura 7.8.4.1. Spectrograma cu fereastra dreptunghiulara.

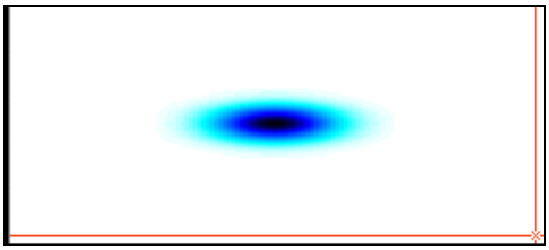


Figura 8.8.4.1. Spectrograma cu fereastra Gaussiana.

În fiecare caz a fost folosită o fereastră de aceeaşi lungime (64 de eşantioane). Se observă că cea mai bună localizare timp-frecvență o are fereastra Gaussiană şi că cea mai proastă localizare timp-frecvență o are fereastra dreptunghiulară. În figura 9.8.4.1 este prezentată spectrograma Gabor folosind baza cu elemente de bandă largă şi ordinul 3. Indicatorul de adaptare are valoarea 1,46 (relativ mică). Se observă superioritatea acestei reprezentări asupra tuturor reprezentărilor anterioare.

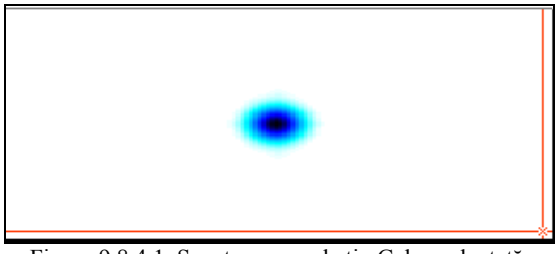


Figura 9.8.4.1. Spectrograma de tip Gabor adaptată.

În figura 10.8.4.1 este reprezentată transformarea Wigner-Ville a semnalului de analizat.

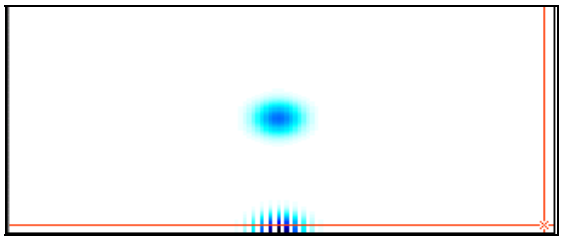


Figura 10.8.4.1. Reprezentarea de tip Wigner-Ville.

În figura 11.8.4.1 este reprezentată transformarea Wigner-Ville a semnalului analitic al semnalului de analizat. Se constată dispariția termenilor de interferență din figura anterioară. Prețul este o slabă înrăutățire a localizării în planul timp-frecvență.

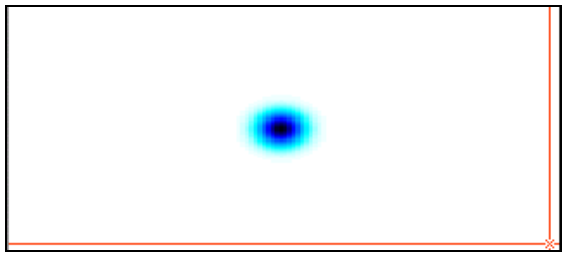


Figura 11.8.4.1. Reprezentarea de tip Wigner-Ville a semnalului analitic al semnalului de analizat.

Pentru a analiza capacitatea de separare a semnalelor în domeniul timp se consideră în următorul exemplu cazul sumei a două semnale de tipul celui considerat în exemplul anterior. Cel de la doilea termen al sumei este întârziat şi factorul său sinusoidal are o frecvență superioară factorului sinusoidal din expresia primului termen. Forma de undă este prezentată în figura 12.8.4.1 iar densitatea sa spectrală de energie în figura 13.8.4.1.

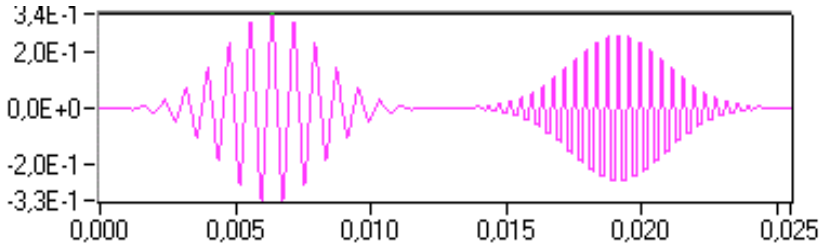


Figura 12.8.4.1. Forma de undă a semnalului din cel de al doilea exemplu.

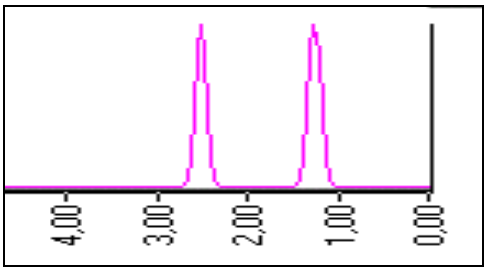


Figura 13.8.4.1. Densitatea spectrala de energie a semnalului din cel de al doilea exemplu.

În figura 14.8.4.1 se prezintă spectrograma acestui semnal. S-a folosit o fereastră temporală de tip Gaussian cu lungimea de 64 de eşantioane.

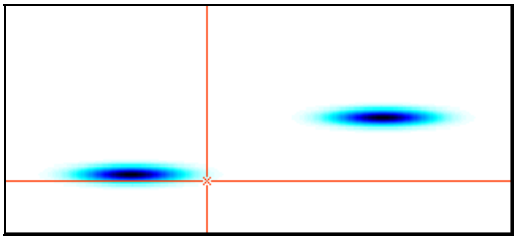


Figura 14.8.4.1. Spectrograma cu fereastra Gaussiana a semnalului de analizat.

În figura 15.8.4.1 se prezintă spectrograma Gabor adaptivă a semnalului din exemplul al doilea. S-a lucrat cu baza cu elementele de bandă de frecvenţă medie si cu ordinul 5. Se constata o imbunatatire a localizarii frecventiale fata de figura 14.8.4.1.

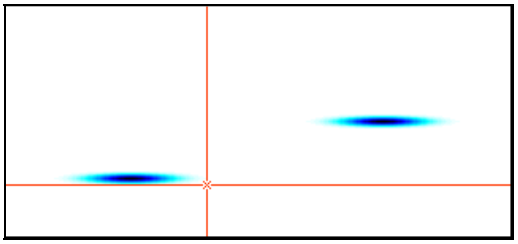


Figura 15.8.4.1. Spectrograma Gabor adaptiva a semnalului din al doilea exemplu.

În figura 16.8.4.1 este prezentata reprezentarea Wigner-Ville a aceluiaşi semnal. Se observă efectul perturbator al termenilor de interferenţa, atât în partea de jos a figurii cât şi în zona sa centrală.

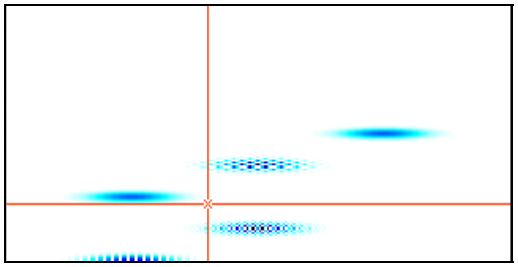


Figura 16.8.4.1. Reprezentarea Wigner-Ville a semnalului din exemplul 2.

Acest efect devine mai puțin supărător dacă se calculează reprezentarea Wigner-Ville a semnalului analitic asociat semnalului de analizat aşa cum se vede în figura 17.8.4.1. Termenii de interferență din zona centrală a imaginii afectează atât localizarea temporală cât şi localizarea frecvențială a reprezentării. Se poate afirma că prin utilizarea reprezentării Wigner-Ville a semnalului analitic asociat semnalului de analizat se elimină o parte din termenii de interferență din reprezentarea Wigner-Ville a semnalului original.

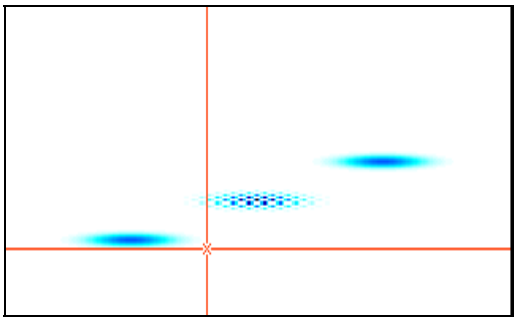


Figura 17.8.4.1. Reprezentarea Wigner-Ville a semnalului analatic corespunz•tor.

În exemplul următor se pune în evidență proprietatea de concentrare a reprezentărilor timp-frecvență în jurul curbei care descrie în planul timp-frecvență, legea de variație a frecvenței instantanee a semnalului de analizat. În acest scop se analizează un semnal modulat în frecvență. Acesta este descris printr-o relație de forma:

$$x(\tau) = A_o \cos\left(\alpha\tau^3 + \beta\tau^2 + \gamma\tau\right)$$

Se constată că analizând aceste figuri este greu să se afle ceva despre frecvența instantanee a semnalului $x(\tau)$. Forma de undă a semnalului din al treilea exemplu este prezentată în figura 18.8.4.1, iar densitatea sa spectrală de energie în figura 19.8.4.1.

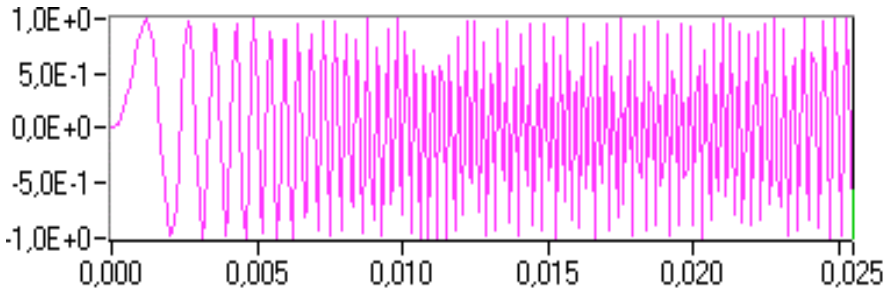


Figura 18.8.4.1. Forma de und• a semnalului din exemplul al treilea.

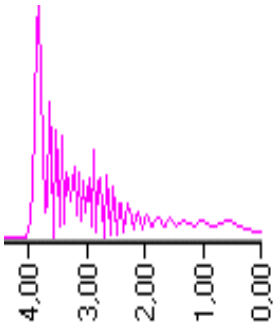


Figura 19.8.4.1. Densitatea spectral• de putere a semnalului din al treilea exemplu.

În figura 20.8.4.1 se prezintă reprezentarea timp-frecvență de tip spectrogramă Gabor adaptivă a semnalului modulat în frecvență. S-a lucrat cu baza cu elemente de bandă largă şi cu ordinul 3. Indicatorul de adaptare are valoarea 2,34. Se constată concentrarea reprezentării timp-frecvență pe parabola de ecuație:

$$\omega_i(\tau) = 3\alpha\tau^2 + 2\beta\tau + \gamma$$

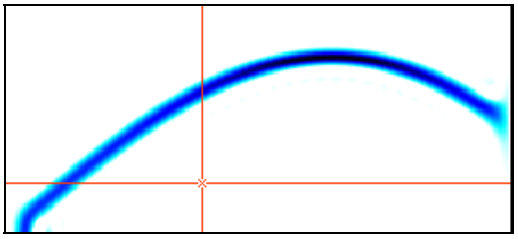


Figura 20.8.4.1. Reprezentarea timp-frecventa de tip spectrograma Gabor adaptiva a semnalului din exemplul al treilea.

În figura 21.8.4.1 este prezentată reprezentarea de tip Wigner-Ville a semnalului analitic asociat semnalului modulat în frecvență. Se constată faptul că prezența termenilor de interferență scade mult "lizibilitatea" legii de variație a frecvenței instantanee a semnalului de analizat.

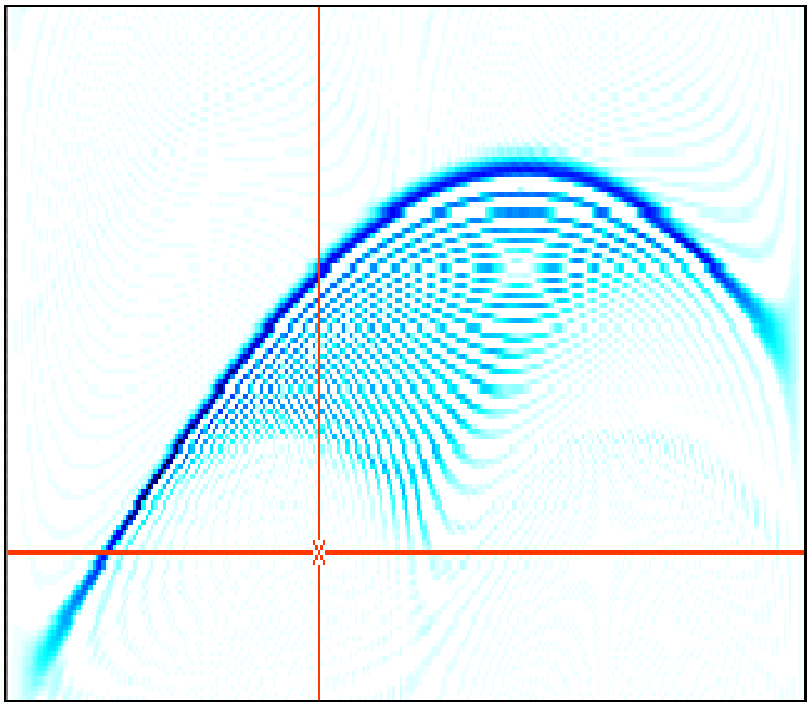


Figura 21.8.4.1. Reprezentarea Wigner-Ville a semnalului analitic asociat semnalului din exemplul al treilea.

Problema reducerii termenilor de interferență este deosebit de actuală. Ea va fi reluată în capitolul destinat aplicațiilor reprezentărilor timp-frecvență.

Una dintre deficiențele programului JTFA este că nu poate fi utilizat pentru calculul reprezentărilor timp-frecvență liniare. Acest program nu calculează nici reprezentarea timp-frecvență de tip scalogramă.

Există însă alte programe care calculează reprezentări timp-frecvență bazate pe funcții "wavelet". Câteva dintre acestea vor fi prezentate în continuare.

8.4.2 PACHETUL DE PROGRAME MEGA WAVE 2

Mega Wave 2 este un produs "soft" destinat să ajute operatorul să conceapă algoritmi de prelucrare a semnalelor şi de analiză a imaginilor. Se presupune că operatorul cunoaşte limbajul C. Algoritmii sunt consideraţi cutii negre, fiind descrişi în limbajul C, fără să se facă vreo ipoteză asupra contextului în care vor fi folosite aceste cutii negre. Armonizarea cu contextul este sarcina compilatorului Mega Wave 2. De fapt acesta transformă algoritmul scris în C într-o comandă, o funcţie a unei librării sau o funcţie care să fie executată la comanda unui interpretor.

Acest produs "soft" a fost creat la Universitatea Paris-Dauphine, în cadrul grupului de cercetare CEREMADE. El este disponibil gratuit putând fi transferat prin INTERNET, prin “anonymus ftp”de la adresa mu.ceremade.dauphine.fr. Pachetul de programe poate fi utilizat numai pe calculatoare care au instalat sistemul de operare UNIX. Instrucţiunile de înregistrare a produsului "soft" precum şi cele de instalare se găsesc în [62]. Un algoritm este implementat ca o funcţie sau ca un set de funcţii în limbajul C. O astfel de funcţie sau set de funcţii reprezintă un MODUL. Compilatorul transformă modulul în COMANDA MODULULUI. În acest mod modulul ajunge să fie o comandă UNIX.

Orice modul aparţine unui GRUP. Un grup recunoaşte toate modulele care se referă la acelaşi subiect. În [62] sunt prezentate toate modulele deja create în Mega Wave 2.

Printre acestea se găsesc şi module destinate utilizării funcţiilor "wavelet". În continuare se prezintă o listă a acestora:

1. Grupul PDE (Partial Diferential Equations),
2. Grupul common / char_image (descrie operaţii uzuale cu imagini),
3. Grupul common / char_movie (descrie operaţii uzuale cu secvenţe de imagini),
4. Grupul common / color_char_image (descrie operaţii cu imagini color),
5. Grupul common / float_image (descrie operaţii de prelucrare a imaginilor),
6. Grupul common / signal (descrie operaţii cu semnale),
7. Grupul demo (ilustrează algoritmii din structura celorlalte grupuri),
8. Grupul owave / image (descrie tehnici de prelucrare a imaginilor folosind funcţiile "wavelet"),
9. Grupul owave / signal (descrie tehnici de prelucrare a semnalelor folosind funcţiile "wavelet"),
10. Grupul snakes (descrie tehnici de interpolare a imaginilor).

În continuare se prezintă elementele grupurilor 9 şi 8.

Grupul 9 este compus din următorii algoritmi:

- biowave 1: calculează transformata "wavelet" biortogonală,
- ibiowave 1: reconstruieşte semnalul din transformata sa "wavelet" biortogonală,

- iowave 1: reconstruieşte semnalul din transformata sa "wavelet" ortogonală,
- owave 1: calculează transformata "wavelet" ortogonală a unui semnal,
- precond 1d: precondiționează un semnal,
- sconvolve: filtrează un semnal.

Grupul 8 este compus din următorii algoritmi:

- biowave 2: calculează transformata "wavelet" biortogonală a unei imagini,
- ibiowave 2: reconstruieşte o imagine din transformata sa "wavelet" biortogonală,
- iowave 2: reconstruieşte o imagine din transformata sa "wavelet" ortogonală,
- owave 2: calculează transformata "wavelet" ortogonală a unei imagini,
- owtrans_fimage: generează o imagine pentru vizualizarea unei descompuneri "wavelet" ortogonale,
- precond 1d: precondiționează o imagine,

În continuare se descriu pe scurt doi dintre aceşti algoritmi:

OWAVE 1. Pornind de la analiza multirezoluție $\{V_m\}_{m\in Z}$ a lui $L^2(R)$, generată de funcția de scară ${}_o\varphi(\tau)$ se construieşte descompunerea ortogonală corespunzătoare $\{W_m\}_{m\in Z}$ descrisă de funcția "wavelets mother" $\psi(\tau)$.Semnalul $x(\tau)$ este descompus în forma:

$$x(\tau) = \sum_k a_{-M,k}\, {}_o\varphi_{-M,k}(\tau) + \sum_{m=1}^{M}\sum_k d_{-m,k}\, \psi_{-m,k}(\tau)$$

Algoritmul owave 1 calculează coeficienții $a_{-M,k}$ şi $d_{-m,k}$. Pentru acest calcul se folosesc filtrele $m_o[n]$ şi $m_1[n]$ corespunzătoare ale căror coeficienți sunt memorați în fişierul Impulse Response. Poate fi utilizată oricare dintre soluțiile problemelor la margini deja prezentate. De asemenea M poate fi ales de orice valoare (pentru care descompunerea este posibilă). Transformarea "wavelet" continuă a semnalului $x(\tau)$ poate fi obținută prin interpolarea bidimensională a coeficienților $\{a_{-M,k}, d_{-m,k}\}_{m=1,M,\ k\in Z}$. Aceasta poate fi realizată de exemplu cu modulul "make".

BIOWAVE 1. Acest algoritm este foarte asemănător cu algoritmul OWAVE 1. Diferența constă în filtrele folosite. Fişierul Impulse Reponse conține de data aceasta răspunsurile la impuls de filtre de tipul $m_o[n]$, $m_1[n]$, $\tilde{m}_o[n]$ şi $\tilde{m}_1[n]$.

Există la ora actuală programe de calcul a reprezentării timp-frecvență de tip "wavelet" care funcționează sub sistemul de operare WINDOWS. Majoritatea lor sunt concepute ca şi subrutine ale unor programe de matematică specializate cum ar fi programele: MATHCAD, MATLAB sau MATHEMATICA.

8.4.3 DESPRE WAVE LAB

Wave Lab este o librărie de rutine MATLAB pentru analiza cu funcţii "wavelet", pachete de funcţii "wavelet" şi cu algoritmul "matching pursuit". Manualul de utilizare "About Wave Lab" [20] poate fi transferat print ftp de la adresa: ftp://playfair.stanford.edu/pub/wavelab.

Această librărie este utilizată în activitatea didactică la universităţile Berkeley şi Stanford. Instalarea librăriei şi modul de pornire al colecţiei de subrutine sunt descrise în manualul de utilizare citat mai devreme. Un alt document care însoţeşte programul WaveLab este [21]. În acest material sunt prezentate structurile de date în care sunt organizate semnalele de analizat şi rezultatele obţinute în cadrul produsului soft WaveLab. Poate că cel mai util document pentru caracterizarea programului WaveLab este [22]. În acest raport este prezentată o listă cu principalele funcţii ale bibliotecii WaveLab. În continuare se vor prezenta câteva dintre aceste funcţii, mai interesante pentru lucrarea de faţă.

1. Transformarea "wavelet" continuă

CWT → calculează reprezentarea de tipul transformare "wavelet" continuă,
Image CWT → afişează imaginea rezultatului obţinut în subrutina anterioară ,
WTMM → identifică mărimile reprezentării anterioare,
Image WTMM → Afişează imaginea care conţine rezultatul anterior,
Build Skel Map → Reprezintă rezultatul aplicării aperatorului morfologic "schelet" (vezi [116]) imaginii Image CWT.

În figura 1.8.4.3 este reluat exemplul semnalului modulat în frecvenţă prezentat şi în figura 18.8.4.1.

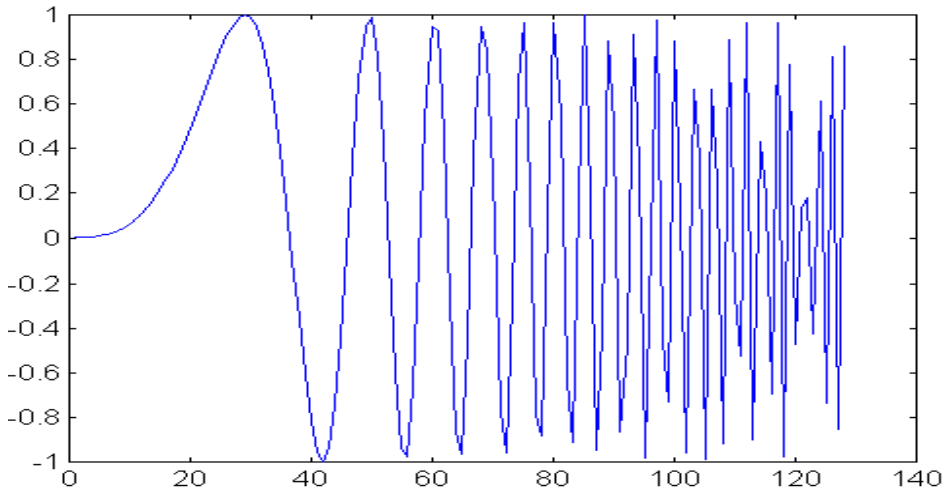


Figura 1.8.4.3. Un exemplu de semnal generat cu ajutorul “tool-box”-ului WaveLab.

Folosind funcţiile: CWT, WTMM şi Image WTMM se calculează şi se reprezintă grafic locul geometric al maximelor reprezentării timp-frecvenţă de tip "wavelet" a semnalului din figura 1.8.4.3. Rezultatul este prezentat în figura 2.8.4.3. A fost utilizată funcţia "wavelet" de tip pălărie mexicană.

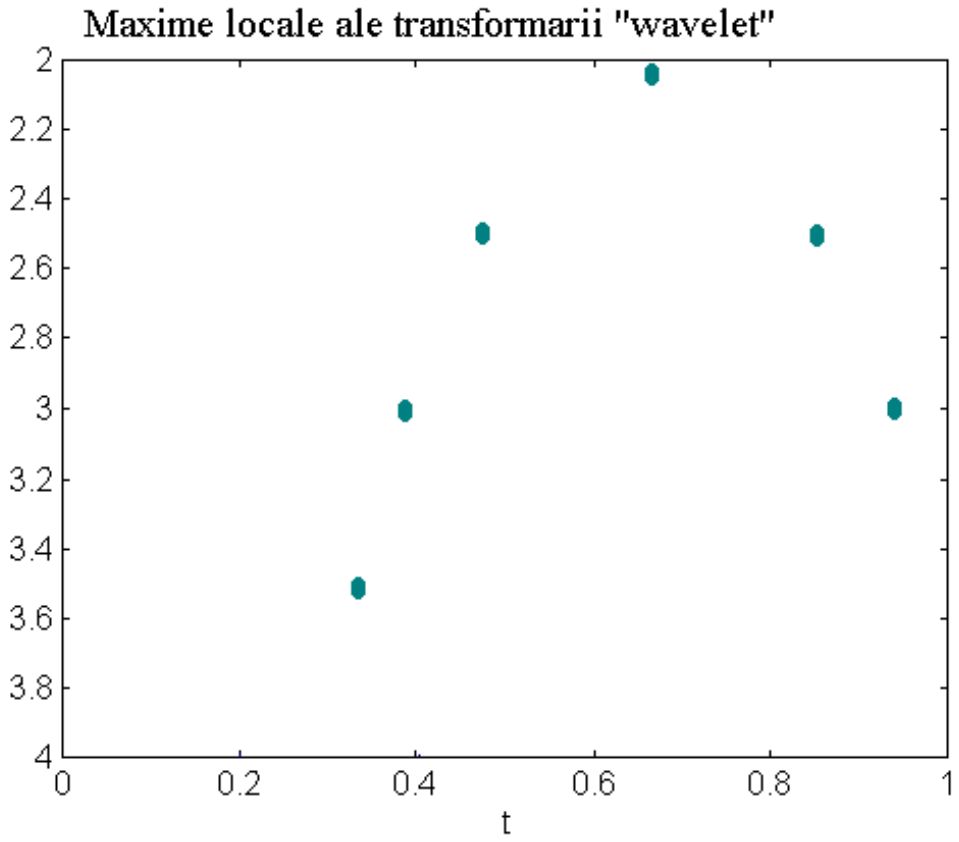


Figura 2.8.4.3. Locul geometric al maximelor reprezentării timp-frecvenţă de tip “wavelet” a semnalului din figura anterioară. S-a utilizat funcţia “wavelet” de tip pălărie mexicană.

2.Structuri de date

Citirea datelor

Browse Image	-	caută fişierul Image Datasets,
Image Fig	-	fişierul de imagini obţinut aplicând Browse Image,
Read Image	-	încarcă un fişier din directorul Image Datasets,
Read Signal	-	încarcă un fişier din directorul Signal Datasets

Generarea datelor

Make Brownian-generează un semnal care descrie mişcarea Browniană a unei particule,
Make Fractal - generează semnale fractale,
Make Signal - generează un semnal,
Make 2d Signal - generează o imagine,
Makediag - generează o imagine descrisă printr-o matrice diagonală,
Există liste de semnale şi imagini, deja sintetizate care pot fi direct apelate.

3.Îmbunătățirea raportului semnal / zgomot (RSZ) dacă semnalul perturbator este zgomot alb

WaveShrink - îmbunătățirea RSZ prin detecție de prag în domeniul transformării "wavelet" discretă ortogonală sau biortogonală,
WPDe Noise - îmbunătățirea RSZ prin detecție de prag în domeniul transformării "wavelet" discretă bazată pe pachete de funcții "wavelet". Pachetul se alege prin căutarea "celei mai bune baze",
CPDe Noise - îmbunătățirea RSZ prin detecție de prag în domeniul transformării "wavelet" discretă bazată pe pachete de funcții "wavelet" cosinusoidale. Pachetul se alege prin căutarea "celei mai bune baze".

În figura 3.8.4.3 este prezentat un alt semnal (Blocks) care poate fi generat cu ajutorul programului WaveLab.

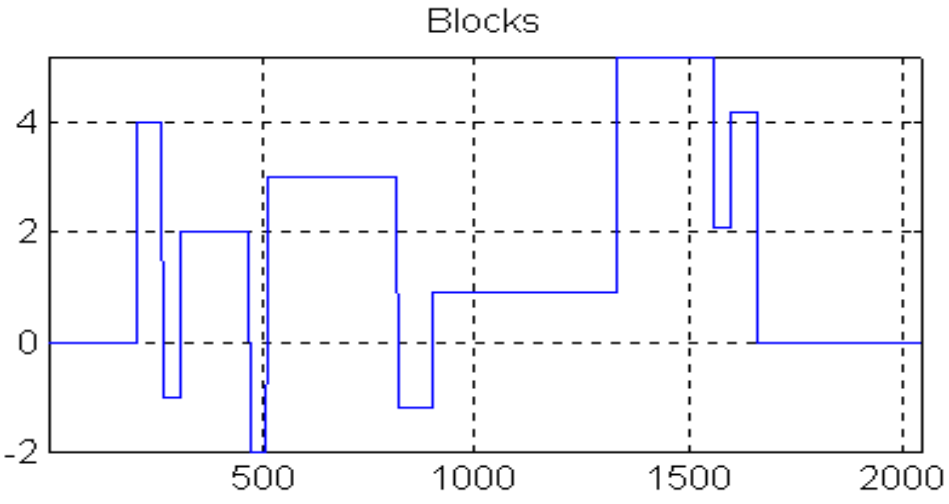


Figura 3.8.4.3. Semnalul "Blocks".

În figura 4.8.4.3 este prezentată o variantă perturbată aditiv cu zgomot alb a aceluiaşi semnal.

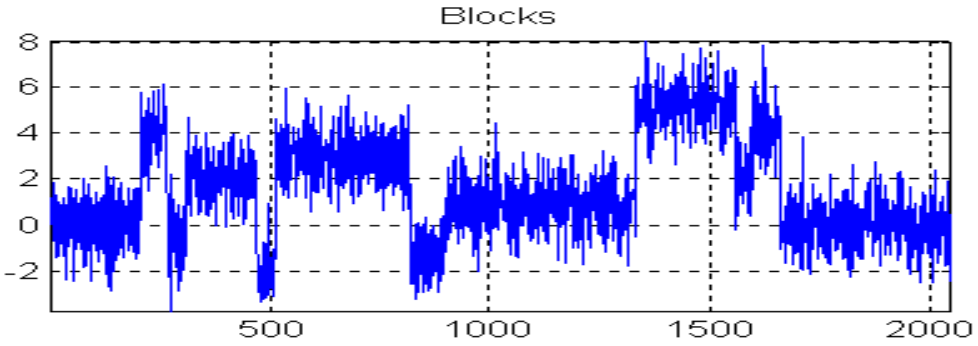


Figura 4.8.4.3. Semnalul “Blocks” perturbat aditiv de zgomot alb.

În figura 5.8.4.3 sunt prezentate transformările "wavelet" discrete ale semnalelor

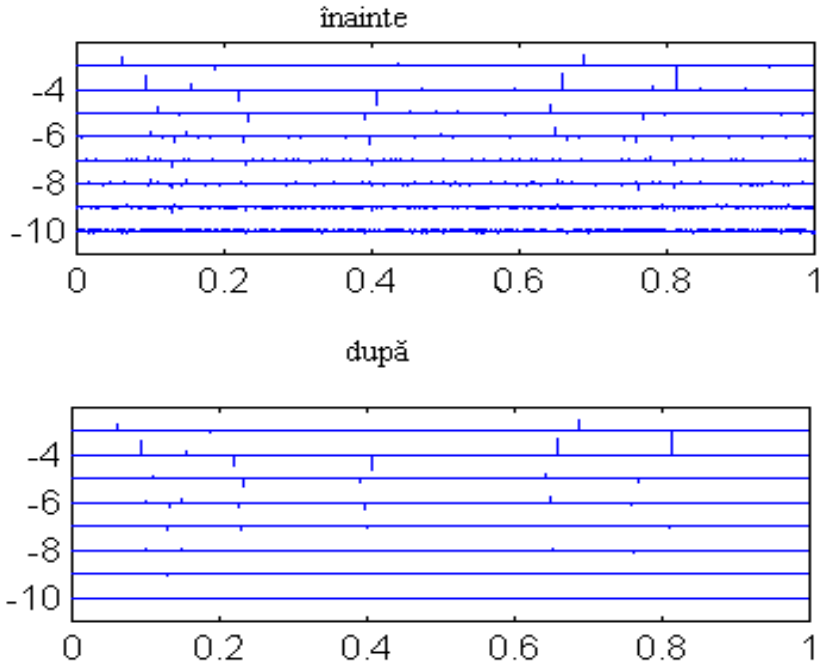


Figura 5.8.4.3. Transformatele “wavelet” discrete ale semnalelor de dinaintea şi de după aplicarea procedurii de “denoising”.

inițial (din figura 4.8.4.3) şi a semnalului obținut după aplicarea procedurii de îmbunătățire a raportului semnal / zgomot (denoising). S-au folosit funcțiile "wavelet" de tip Haar. În figura 6.8.4.3 sunt prezentate pe lângă semnalele din figurile 3.8.4.3 şi 4.8.4.3 semnalul obținut în urma aplicării procedurii " denoising" precum şi eroarea de reconstrucție.

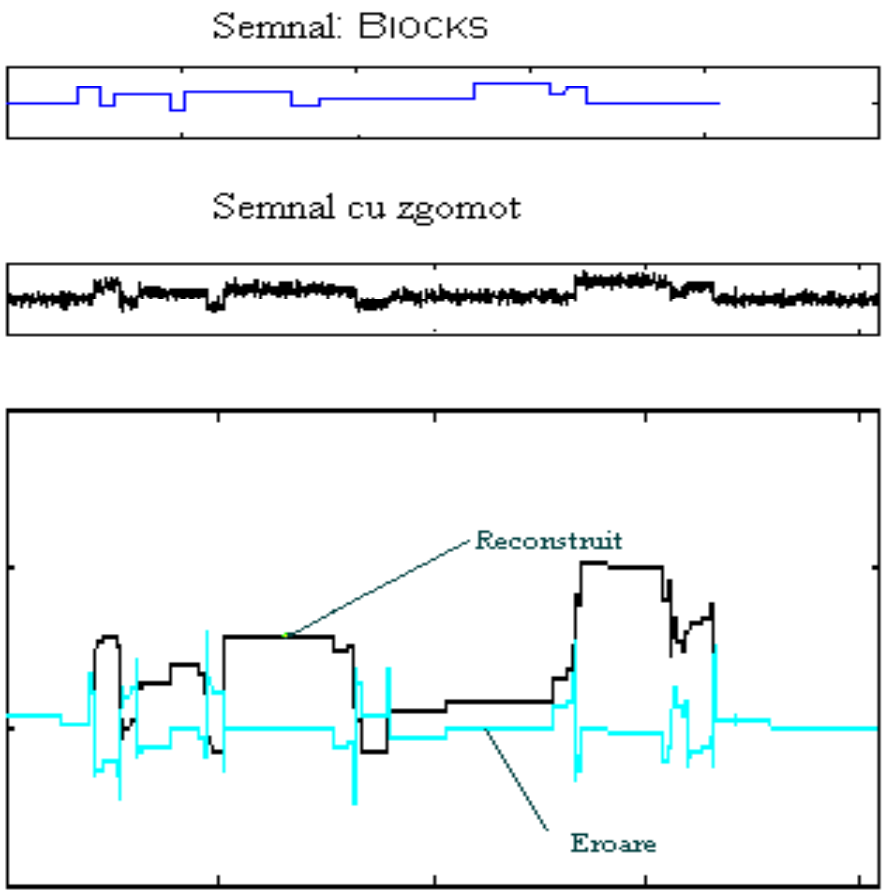


Figura 6.8.4.3. Efectul aplicării procedurii de “denoising”.

În sfârşit în figura 7.8.4.3 sunt prezentate densitățile spectrale de energie ale semnalelor din figura 4.8.4.3 respectiv a semnalului reconstruit.

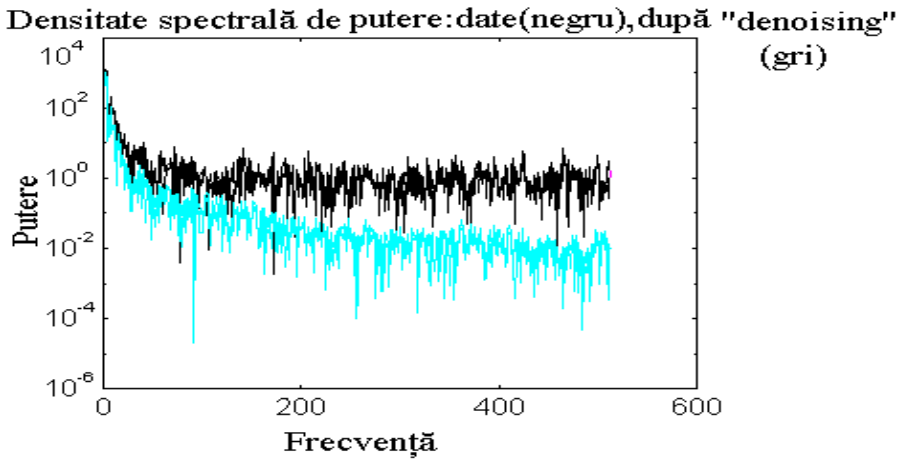


Figura 7.8.4.3. Densităţile spectrale de energie ale semnalelor de dinainte şi de după aplicarea procedurii "denoising".

4. Transformări "wavelet" ortogonale

Transformări:

FWT_PO - Transformare "wavelet" discretă ortogonală. Problemele la margini sunt rezolvate prin periodizare,
IWT_PO - Transformare "wavelet" discretă ortogonală inversă. Problemele la margini sunt rezolvate prin periodizare,
ITWT2_PO - Transformare "wavelet" discretă ortogonală inversă pentru semnale bidimensionale,

Filtre de generare a funcţiilor "wavelet"

Make ON Filter: generează filtrele de construcţie a funcţiilor "wavelet" de tip Daubechies, Coiflets, ...

.
.
.

5. Pachete de funcţii "wavelet" unidimensionale

Pachete de funcţii "wavelet" Analiză / Sinteză

WP Analysis - Se reprezintă un tabel "diadic" al tuturor coeficienților pachetului de funcții "wavelet" corespunzător semnalului de analizat,
WP Synthesis - Sintetizează semnalul cu ajutorul coeficienților de mai sus,
WP Tour - Face descompunerea cu pachete de funcții "wavelet" în cea mai bună bază,

Căutarea celei mai bune baze
Best Basis: Algoritmul descris în paragraful 8.3
CalcStat Tree: Construieşte un arbore ale cărui noduri sunt etichetate cu valorile de entropie (vezi paragraful 7.1.2.10).

.
.
.

În figura 8.8.4.3 se prezintă transformarea "wavelet" discretă folosind pachete de funcții "wavelets" a semnalului din figura 3.8.4.3. În figura 9.8.4.3 este prezentat "arborele" care a condus la selectarea celei mai bune baze de tip Haar, în care s-a făcut transformarea semnalului "Blocks" din figura 8.8.4.3.

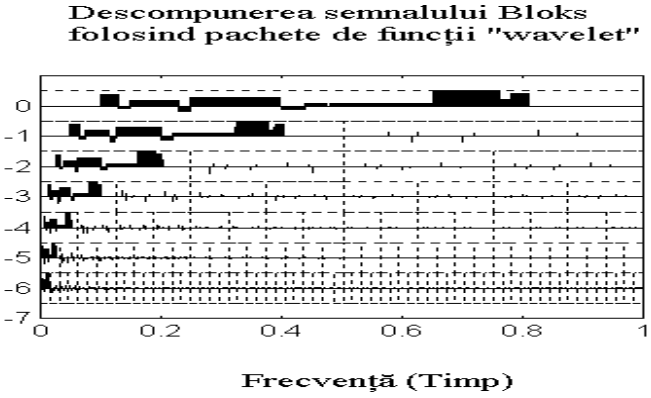


Figura 8.8.4.3. Transformarea "wavelet" discretă folosind pachete de funcții "wavelets" de tip Haar a semnalului din figura 3.8.4.3.

După cum se vede, criteriul de căutare a celei mai bune baze a fost minimizarea entropiei. În figura 10.8.4.3 se prezintă descompunerea atomică, în planul timp-frecvență a semnalului "Blocks", astfel obținută. În continuare se prezintă câteva concluzii referitoare la "tool-box"-ul WaveLab.

- Această bibliotecă este exhaustivă, conținând peste 800 de fişiere MatLab. De altfel ea este actualizată în permanență.

- WaveLab reuşeşte să fie o unealtă de cercetare reproductibilă, deoarece dă accesul oricărui cercetător la uneltele pe care le-au folosit autorii săi în articolele pe care le-au publicat.

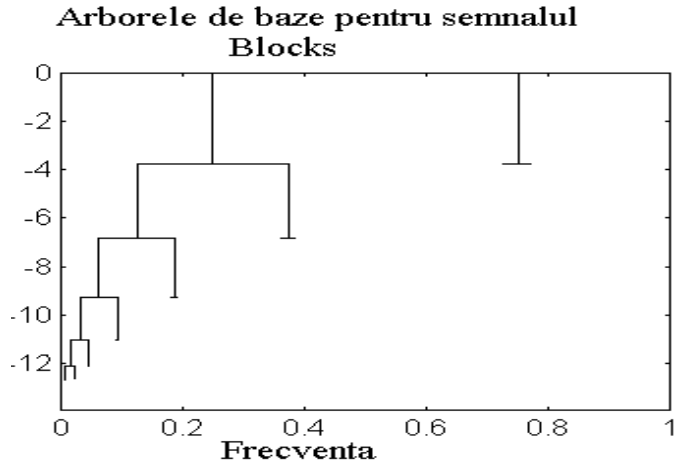


Figura 9.8.4.3. Arborele de selecție a celei mai bune baze pentru transformarea din figura anterioară.

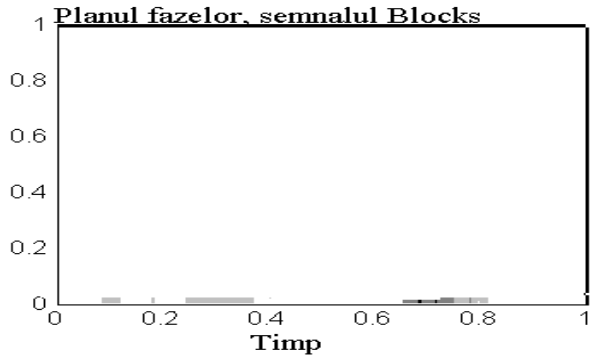


Figura 10.8.4.3. Descompunerea atomică în planul timp-frecvență a semnalului Blocks.

În acest mod pot fi reproduse oriunde în lume experiențele efectuate în laboratorul de cercetare de la Universitatea Stanford.

În capitolul următor, dedicat aplicațiilor reprezentărilor timp-frecvență, se vor mai face referiri la WaveLab. În continuare se prezintă succint câteva produse soft care mai pot fi utilizate la analiza timp-frecvență a semnalelor. În acest scop a fost consultată arhiva revistei electronice "Wavelet Digest" pe ultimii doi ani. În tabelul 1.8.4.3 sunt date informații despre data lansării fiecărui astfel de produs "soft", despre laboratorul în care a fost creat, despre tipul de mașină pe care poate fi utilizat, despre scopul în care poate fi utilizat, precum şi despre modul în care poate fi procurat. În cazul produselor gratuite este specificată adresa de la care poate fi transferat prin INTERNET programul respectiv. În cazul produselor care pot fi cumpărate sunt date adrese de curier electronic de unde pot fi obținute informații referitoare la achiziție.

Tabelul 1.8.4.3.

Nr. crt.	Denumirea programului	Tipul calculatorului	Adresa electronică de unde poate fi procurat	Autorul
1.	MacWavelets v.100	MacIntoch	http://www.intergalact.com/macwavelets/ macwavelets. html	Sky Coyote
2.	Uvi_Wave 2.0	PC sub Windows	http://www.tsc.uvigv.es/~wavelets/uvi_wave. html	Nuria Gonzales Prelic
3.	Xripple	Pc sub Lynux	ftp144.16.100.24,user:anonymus,passwd:your _email_adress, cd pub, hash, bin, get Xripple. tar.gz,bye	K.Sunil Kumar
4.	Math Works'Wavelet Toolbox	PC sub Windows sau stație SUN	se cumpără, http://www.mathworks.com/macwavelet.html	M. Misiti, Y.Misiti, G. Oppenheim, J.M. Poggi
5.	Wavelet Cascade Applet	PC sub Windows sau stație SUN	http://com.bell-labs.com/wavelet.html	Wim Sweldens
6.	Wavelet Explorer from Wolfram Research	PC sub Windows	http://www.wolfram.com/mathematica/aplicati ons	Julie Porter
7.	Liftpack	PC sub Windows, platformă UNIX, MacIntoch	informații la: fermande@cs.sc.edu	G. Fernandez
8.	E2DCT - codor de imagine ba-zat pe transf. cosinus discretă		"anonymus ftp" la picard.ifp.uiuc.edu/pub/zn/ software	Zixiang Xing
9.	Filtre biortogonale	"hard"	informații la mrt@wavelet.com	---

10.	Programe C++ pentru compresia de imagini cu funcții "wavelet"	PC sub Windows, platformă UNIX, MacIntoch	http://www.cs.dartmouth.edn/~gdavis/wavele/wavelet.html	Geoff Davis
11.	Generator de func•ii “wavelet”	PC sub Windows, platformă UNIX, MacIntoch	http://www.dfw.net/~mcody	Mac A. Cody
12.	Wavelet and Filter Bancks Design Toolkit	PC sub Windows	ftp://ftp.natinst.com/WaveTool.zip	Shie Qian
13.	Analizor timp-frecvență	PC sub Windows	ftp://ftp.natinst.com/TFmatlab.zip	Shie Qian
14.	Multi-Scale Image Pyramids	Platforme SUN sau MacIntosh	http://www.cis.upenn.edu/~eero	Eero Simoncelli
15.	Wavelet MMX	PC sub Windows	http://www.fastman.com/MMX/FASTMAN_MMX.html	Mike Tucker
16.	Wavelet with Integer Lifting	PC sub Windows, platforme UNIX	http://www.cs.kuleuven.ac.be/~wavelets/	Geert Uylterhoeven
17.	transformări "wavelet" în timp real	PC sub Windows, procesoare de semnal	informații la cranes@giaskg01.vsnl.net.im	R. Nagesh
18.	Analizor timp-frecvență	PC sub Windows	informații la: 100665.351@compuserve.com	Paul Soninger

Nr. crt.	Observații	Unde a fost creat	Data la care a fost anunțat în Wavelets Digest
1.	Folosind extensiv interfața cu utilizatorul standard MacIntosh folosirea programului nu necesită al soft	La firma Intergalact SUA	Martie, 1996
2.	Este un "tool-box" pentru Matlab	Universitatea din Vigo, Spania	Martie, 1996
3.	Este o interfață grafică cu utilizatorul	Institutul indian de tehnologie, Bombay, India	Mai, 1996
4.	"Tool-box" Matlab	Universitatea Paris-Sud, Orsay, Franța	Iunie, 1996
5.	"Applets" Java; permite reprezentarea grafică a unor funcții "wavelet" cu ajutorul rețelei INTERNET	Laboratoarele Bell SUA	Iunie, 1996
6.	"Tool-box" pentru "Mathematica"	Laboratoarele Wolfram, SUA	August, 1996
7.	Program în C pentru construcția funcțiilor "wavelet" folosind schema de "înfrumusețare prin operație cosmetică" (lifting scheme)	Laboratoarele Bell, SUA	Septembrie, 1996
8.	"Software" pentru codarea imaginilor folosind transformarea cosinus discretă	Universitatea Princeton, SUA	Octombrie, 1996
9.	Sunt filtre numerice de tipul FPGA	Compania Fastman, SUA	Decembrie, 1996
10.	Librărie de programe C++	Darthmouth College, Marea Britanie	Ianuarie, 1997
11.	Aplicație bazată pe Tcl/Tk care poate rula la fel ca şi o aplicație Java pe rețeaua INTERNET	---	Februarie, 1997

12.	Proiectarea asistată de calculator a bancurilor de filtre	Compania National Instruments	Aprilie, 1997
13.	"Tool-box" pentru MATLAB	Compania National Instruments	Aprilie, 1997
14.	Librărie MATLAB	Universitatea din New-York, SUA	Aprilie, 1997
15.	Algoritmi rapizi de calcul a transformărilor "wavelet" discrete	Compania Fastman, SUA	Mai, 1997
16.	Librărie în C++ de transformări de tip "wavelet"	Universitatea Catolică din Leuven, Belgia	Mai, 1997
17.	Librărie de programe pentru procesoare de semnal	Compania Crane Software, India	Iulie, 1997
18.	WavePak, reprezentări timp-frecvență de tip "wavelet"	----	August, 1997

Capitolul 9

APLICAȚII

Se poate afirma că nu există nici un domeniu de aplicare a teoriei semnalelor în care să nu existe aplicații ale reprezentărilor timp-frecvență. De fapt, fiecare tip de reprezentare timp-frecvență a apărut din nevoia rezolvării unei probleme practice. Marea diversitate a aplicațiilor reprezentărilor timp-frecvență face ca încercarea de a clasifica aceste aplicații să fie foarte dificilă. De aceea în acest capitol va fi făcută o trecere în revistă a aplicațiilor reprezentărilor timp-frecvență, insistându-se asupra acelora care au fost dezvoltate în echipa de cercetare din care fac parte autorii. Pentru celelalte vor fi indicate surse bibliografice şi se va încerca evidențierea performanțelor obținute dar şi a factorilor care limitează utilizarea lor. Această expunere se va baza pe rezultatele teoretice prezentate în primele şapte capitole ale acestei lucrări. Acolo unde vor fi necesare şi cunoştințe teoretice suplimentare, acestea se vor prezenta pe scurt. În construcția exemplelor care vor fi prezentate vor fi utilizate cunoştințele expuse în capitolul 8. Clasificarea aplicațiilor este făcută după domeniile acestora.

9.1 APLICAȚIILE REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ ÎN R A D A R

În cazul Radarului se emit unde electromagnetice descrise prin semnale cu modulație liniară de frecvență. Aceste unde se reflectă de pe țintă (care este un obiect în mişcare) şi sunt recepționate în punctul din care au fost emise. Reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville a semnalului recepționat este egală cu convoluția bidimensională a reprezentării Wigner-Ville a semnalului emis cu reprezentarea Wigner-Ville a unui semnal care poartă informații despre țintă, [13]. Inversând reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville a semnalului care poartă informații despre țintă, poate fi determinat acest semnal. După cum s-a arătat în capitolul 3, rezolvarea naturală a problemei radiolocației se bazează pe utilizarea reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine. De fapt funcția de incertitudine a semnalului recepționat este legată de funcția de incertitudine a semnalului emis prin relația (44). Dar în capitolul 4, s-a arătat că reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville a unui semnal reprezintă transformata Fourier bidimensională a reprezentării timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine a aceluiaşi semnal. De aceea luând transformata Fourier bidimensională în cei doi membri ai relației (44) se obține o relație foarte simplă între reprezentările Wigner-Ville ale semnalelor $s(\tau)$ şi $s_r(\tau)$. Pe baza acestei relații pot fi determinate uşor valorile t_0 şi $\Delta\omega$. Metoda de detecție a țintei descrisă mai sus nu ține seama de zgomotul care poate perturba semnalul recepționat. De fapt în aplicațiile RADAR există 4 surse de semnale perturbatoare: 1. Ecourile fixe datorate mediului înconjurător (munți, clădiri, ...), 2. Zgomotul propriu al sistemului RADAR,

3. Ecourile datorate condiţiilor meteorologice (ploaie, nori....), 4.Ecourile mobile datorate altor ţinte (avion, vapor, vehicul de sol). În [61] este prezentată o metodă de eliminare a acestor perturbaţii folosind transformarea "wavelet" discretă ortonormală. Această metodă se bazează pe efectul de decorelare al acestei transformări. Acest efect va fi evidenţiat într-un alt paragraf din acest capitol. Metoda constă în următoarele etape: 1. Se realizează descompunerea semnalului recepţionat prin proiecţie pe spaţiile V_m, W_m, $m = -1, -2, \ldots -M$, obţinându-se semnalele în timp discret $a_m[n]$ şi $d_m[n]$. Pentru fiecare valoare a indicelui m se efectuează un test pe baza căruia dacă în mulţimea $\{d_m[n]\}_{n\in Z}$ există un singur minim sau un singur maxim atunci semnalul $d_m[n]$ va fi utilizat la reconstrucţia semnalului RADAR. Folosind semnalul $a_{-M}[n]$ şi semnalele $d_m[n]$ păstrate în urma producerii descrise mai sus, se reconstruieşte semnalul radar. Raportul semnal pe zgomot al semnalului reconstruit este mai mare decât raportul semnal pe zgomot al semnalului recepţionat. Semnalului reconstruit i se aplică procedura de detecţie standard. Instalaţiile RADAR moderne nu se rezumă doar la urmărirea ţintei. Ele produc şi o imagine a acesteia. Acest lucru este posibil deoarece ţinta nu mai este modelată ca şi punct material (aşa cum s-a presupus în capitolul 3). Pentru producerea imaginii este necesar ca simultan să fie emise şi recepţionate mai multe unde electromagnetice (câte una pentru fiecare punct al imaginii). Fiecăruia dintre acestea îi corespunde câte un punct de reflexie de pe suprafaţa ţintei. De aceea însumând toate undele reflectate se poate obţine imaginea ţintei. Descrierea unei astfel de instalaţii RADAR este făcută în capitolul 10 al lucrării [117]. Pentru generarea imaginii se foloseşte transformarea Fourier deoarece se presupune că semnalele recepţionate sunt staţionare. Pentru generarea unui cadru de imagine de calitate este necesar un anumit timp. Acest interval de timp nu poate fi oricât de scurt având în vedere complexitatea operaţiilor care trebuiesc efectuate (achiziţia tuturor semnalelor recepţionate corespunzătoare semnalelor emise la un anumit moment, extragerea informaţiilor necesare pentru stabilirea coeficientului de reflexie corespunzător fiecărui punct de reflexie, operaţie în care se utilizează şi transformarea Fourier, sinteza imaginii ...). Dar ţinta se află în mişcare. În intervalul de timp necesar generării unui cadru de imagine a ţintei corespunzătoare unui anumit moment de timp, ţinta îşi modifică poziţia. Pentru ca să se obţină o imagine de calitate a ţintei, pe întreaga durată a observării sale este necesar să se utilizeze tehnici de compensare a mişcării. Scopul lor este de a conferi caracter staţionar semnalelor recepţionate specifice fiecărui cadru de imagine. Există situaţii în care chiar şi după aplicarea acestor tehnici, calitatea imaginii obţinute nu este satisfăcătoare deoarece nu se realizează staţionarizarea semnalelor recepţionate. De aceea este utilă înlocuirea transformării Fourier ca o reprezentare timp-frecvenţă în procesul de generare al fiecărui cadru de imagine, aşa cum se presupune în ultima referinţă bibliografică citată.

9.2 APLICAȚIILE REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ ÎN EXPLORAREA SEISMICĂ

La fel ca şi în cazul RADAR-ului, metodele moderne de explorare seismică se bazează pe folosirea unor semnale cu modulație liniară de frecvență. Aceste semnale se transformă în unde acustice cu ajutorul unor plăci vibrante aflate în contact cu suprafața pământului. Reprezentarea Wigner-Ville a semnalului recepționat este dată de convoluția bidimensională a reprezentării Wigner-Ville a semnalului emis şi reprezentarea Wigner-Ville a unui semnal care caracterizează structura subsolului din zona testată. Cunoscând transformările Wigner-Ville a semnalelor emis şi recepționat după aplicarea transformării Wigner-Ville inverse se pot obține informații despre straturile subțiri din subsol sau despre absorbția şi dispersia acestuia. Aceste tehnici sunt prezentate în detaliu în [16]. Ele tind să înlocuiască tehnicile tradiționale bazate pe intercorelație deoarece subsolul terestru are o comportare de filtru trece jos variant în timp. Această comportare poate fi compensată prin filtrare trece sus în planul timp-frecvență.

9.3 APLICAȚIILE REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ LA DETECȚIA DEFECTELOR MECANICE

Una dintre tehnicile de bază pentru identificarea defectelor mecanice ale unor instalații în stare de funcționare se bazează pe studiul vibrațiilor dezvoltate în aceste echipamente. Există două categorii de astfel de vibrații: sincrone cu mişcarea unor subansamble, asincrone.

Chiar în cazul vibrațiilor sincrone apar componente de intermodulație ca urmare a variațiilor de viteză ale subansamblelor corespunzătoare. În [60] se face o trecere în revistă a tehnicilor tradiționale de analiză a vibrațiilor: analiza spectrală, medierea semnalului sincronă cu mişcarea sursei vibrațiilor, analiza părții nestaționare a vibrațiilor, demodularea în domeniul timp. O modalitate simplă de identificare a defectului este analiza vibrațiilor obiectului studiat în planul timp-frecvență. Practic se poate obține o semnătură în planul timp-frecvență a vibrațiilor subansamblului considerat. Aceasta se poate compara cu semnătura în planul timp-frecvență a subansamblului înregistrată când acesta a funcționat corect. Dacă cele două semnături sunt diferite atunci se trage concluzia că subansamblul considerat este defect. De exemplu, aşa cum s-a arătat în [13], folosind reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville poate fi obținută semnătura în planul timp-frecvență a fiecărui cilindru al unui motor Diesel. În acest mod comparând semnăturile obținute pot fi identificate defectele la cilindrii motorului. Şi sistemele de injecție ale motoarelor Diesel pot fi caracterizate în planul timp-frecvență. În acest scop pe lângă reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville poate fi utilizată şi reprezentarea timp-frecvență de tip scalogramă, aşa cum se arată în [38].

9.4 APLICAŢIILE REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENŢĂ ÎN MEDICINĂ

Este binecunoscut faptul că pentru diagnosticarea maladiilor cardiovasculare se utilizează electrocardiogramele. Acestea sunt înregistrări ale formei de undă a semnalului ECG. Acest semnal descrie ciclul de funcţionare al inimii corespunzătoare fiecărei bătăi a acesteia. Semnalul ECG nu este un semnal staţionar. De aceea este utilă analiza sa în planul timp-frecvenţă. De fapt se poate afirma că cu cât maladia cardiovasculară este mai severă cu atât semnalul ECG este mai nestaţionar.

În [13] sunt prezentate reprezentări timp-frecvenţă de tipul transformare Fourier scurtă respectiv Wigner-Ville ale unui semnal ECG. În acest caz prezenţa termenilor de interferenţă în reprezentarea timp-frecvenţă de tipul Wigner-Ville este utilă, imaginea acestor termeni de interferenţă fiind utilă la stabilirea diagnosticului. De fapt au fost elaborate modele matematice pentru semnalul ECG al unui pacient sănătos şi se cunosc semnăturile corespunzătoare în planul timp-frecvenţă. Înregistrând semnătura în planul timp-frecvenţă a semnalului ECG al pacientului testat, acesta poate fi comparată cu semnătura standard. Dacă se remarcă diferenţe atunci se poate presupune că pacientul testat este bolnav. Analizând localizarea în planul timp-frecvenţă a acestor diferenţe se poate formula şi diagnosticul. În prezent există modele matematice pentru semnalele ECG specifice pentru fiecare tip de maladie a inimii. Evident se cunosc şi semnăturile timp-frecvenţă corespunzătoare. Şi acestea sunt foarte utile pentru elaborarea diagnosticului.

Reprezentările timp-frecvenţă pot fi utilizate şi în studiul funcţionării sistemului nervos [127]. Supravegherea electrică a sistemului nervos poate fi realizată în mai multe moduri. Rezultatele obţinute sunt:

- encefalograme (înregistrări ale formei de undă a semnalului EEG),
- potenţiale evocate,
- semnale acustice.

Semnalele EEG au amplitudini cuprinse între 10 şi 100 μV iar banda lor de frecvenţe este cuprinsă în intervalul [0,5 Hz, 40 Hz]. Ele se utilizează de obicei la studiul somnului pacientului. Potenţialele evocate sunt semnale electrice care descriu răspunsul creierului la diferiţi stimuli externi. Aceste semnale pot fi de natură:

- vizuală,
- auditivă,
- somatosenzorială.

Se utilizează de obicei pentru monitorizarea activităţii cerebrale în timpul operaţiilor sau a procesului de reanimare. Amplitudinea acestor semnale este cuprinsă între 0,1 μV şi 10 μV. Având în vedere nivelul lor scăzut, de obicei, după achiziţia acestor semnale li se îmbunătăţeşte raportul semnal / zgomot prin mediere alunecătoare sincronă.

Semnalele acustice produse de sistemul vascular cerebral pot fi folosite la detectarea anevrismelor arteriale (deformări ale unor artere). Detecţia anevrismelor intracraniene, înainte de ruperea arterei în cauză este foarte dificilă datorită lipsei de semne de avertizare. De obicei apar doar simptome vagi şi nespecifice. O tehnică ieftină şi neinvazivă de diagnosticare a anevrismelor intracraniene, bazată pe utilizarea semnalelor acustice a fost elaborată recent. Această tehnică foloseşte dispozitive de înregistrare acustică cum ar fi: microfoane, hidrofoane sau dispozitive Doppler de măsurare a vitezei de curgere a sângelui pentru a detecta neregularităţi în procesul de curgere a sângelui. Aceste neregularităţi sunt specifice prezenţei unui anevrism. Semnalul electric care descrie curgerea sângelui în vecinătatea anevrismului este profund nestaţionar.

Toate cele trei categorii de semnale descrise mai sus (EEG, potenţial evocat, acustic) sunt nestaţionare pretându-se la analiza timp-frecvenţă. În continuare se trec în revistă câteva tehnici de analiză a acestor semnale.

O metodă tradiţională de analiză a acestor semnale este bazată pe folosirea transformării Fourier discrete. Cu ajutorul ei pot fi obţinute: spectrul, interspectrul sau funcţia de corelaţie a semnalelor biologice descrise mai sus.

O altă metodă de analiză a semnalelor care descriu activitatea cerebrală este aşa-numita demodulare complexă a acestora. Ea constă în filtrarea trece-bandă a semnalului bioelectric. În acest mod se poate studia comportarea unei armonici a acestui semnal în cursul timpului.

Dacă se consideră că semnalul bioelectric este un semnal modulat în frecvenţă, cvasistaţionar, atunci în faza semnalului de la ieşirea filtrului trece-bandă se găsesc informaţii despre variaţiile frecvenţei instantanee a armonicii selectate din semnalul bioelectric. Demodularea complexă poate fi realizată şi în timp discret folosindu-se transformarea Fourier discretă. La început, semnalul în timp discret $x[n]$ (obţinut prin eşantionarea semnalului biologic) este deplasat în frecvenţă prin înmulţire cu o exponenţială complexă:

$$\tilde{x}[n] = x[n]\, e^{-j\Omega_0 n}$$

Discretizând şi frecvenţa Ω_0:

$$\Omega_0 = \frac{m}{N} 2\pi$$

şi luând în cei 2 membrii ai ultimei relaţii transformata Fourier discretă se obţine:

$$\tilde{X}[k] = X[k+m]$$

Semnalul demodulat $d[n]$, poate fi obținut cu ajutorul transformatei Fourier discrete inverse, dacă aceasta este aplicată doar într-o anumită bandă de frecvențe, (se consideră doar K eşantioane din $\widetilde{X}[k]$, în jurul frecvenței Ω_o):

$$d[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} \widetilde{X}[k]\, e^{j2\pi\, n\frac{k}{N}}$$

Faza acestui semnal este semnalul în timp discret:

$$\alpha[n] = \arg\{\, |d[n]| \,\}$$

şi reprezentarea Wigner-Ville discretă poate fi utilizată la analiza semnalelor bioelectrice. Se preferă însă folosirea reprezentării pseudo Wigner-Ville discretă:

$$W_z(n,\, k) = 2 \sum_{l=-N+1}^{N-1} f_n(l)\; e^{-j2\pi\, k\frac{l}{N}}$$

unde $z[n]$ este semnalul analitic asociat semnalului $x[n]$, iar:

$$f_u(l) = z[n+l]\, z^*[n-l]\, w[l]\, w[-l]$$

Semnalul $w[n]$ reprezintă o funcție fereastră, reală, de lungime $2N-1$ cu $w[0]=1$.

Reprezentarea pseudo Wigner-Ville discretă poate fi rescrisă în forma:

$$W_z(n,\, k) = 4 \sum_{l=0}^{N-1} u[l] \cos\left(\frac{2\pi\, l\, k}{N}\right) + 4 \sum_{l=0}^{N-1} v[l] \sin\left(\frac{2\pi\, l\, k}{N}\right) - 2\,|z[n]|^2$$

unde:

$$u[l] = \mathrm{Re}\{\, f_n(l) \,\} \quad ; \quad v[l] = \mathrm{Im}\{\, f_n(l) \,\}$$

Această expresie poate fi uşor calculată cu ajutorul transformării Fourier discretă. Având în vedere că de obicei semnalele bioelectrice sunt semnale modulate în frecvență uneori este utilă cunoaşterea dependenței de timp a frecvenței lor instantanee. Dar reprezentările timp-frecvență se concentrează în planul timp-frecvență pe frecvența instantanee (aceasta este una dintre condițiile impuse unei reprezentări timp-frecvență, aşa cum s-a arătat în capitolul 2). De aceea ele pot fi folosite la estimarea legii de variație în timp a frecvenței instantanee a semnalului de analizat. Diferite tehnici de estimare a frecvenței instantanee bazate pe utilizarea unor reprezentări timp-frecvență vor fi prezentate într-un paragraf următor.

Şi funcțiile "wavelet" pot fi utilizate în analiza semnalelor bioelectrice care descriu funcționarea sistemului nervos central. Această afirmație este dezvoltată în [119].

9.5 APLICAȚIILE REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ ÎN METROLOGIE

După cum s-a arătat în capitolul 1 reprezentările timp-frecvență au apărut din necesitatea de a măsura diferiți parametri ai unor semnale nestaționare. Utilizarea metodelor timp-frecvență a condus la construcția unor noi tipuri de aparate de măsurare. În acest paragraf vor fi prezentate câteva metode de măsurare bazate pe reprezentări timp-frecvență precum şi unele aparate de măsurare care folosesc aceste metode.

9.5.1 MĂSURAREA FRECVENȚEI INSTANTANEE

Fie semnalul modulat în frecvență cu modulator liniar:

$$x(\tau) = \cos\left(2\pi\tau^2\right) \tag{487}$$

Transformata sa Hilbert este:

$$H\{x(\tau)\} = \sin\left(2\pi\tau^2\right)$$

Semnalul analitic asociat lui $x(\tau)$ este :

$$x_a(\tau) = x(\tau) + j\ H\{x(\tau)\} = e^{-j\,2\pi\tau^2}$$

Argumentul acestui semnal este:

$$\arg\{x_a(\tau)\} = 2\pi\tau^2$$

iar frecvența sa instantanee:

$$f_i(\tau) = 2\tau \tag{488}$$

În continuare se determină reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville a semnalului $x_a(\tau)$. Nucleul acestei reprezentări este:

$$K_{W-V_{x_a}}(t,\tau) = x_a\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x_a^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) = e^{j\,2\pi(2t\tau)}$$

Deci:

$$TF_{x_a}^{W-V}(t,\omega)=F\left\{K_{W-V_{x_a}}(t,\tau)\right\}(\omega)=F\left\{e^{j(4\pi t)\tau}\right\}(\omega)= \\ =2\pi\delta(\omega-4\pi t) \tag{489}$$

Se constată că reprezentarea Wigner-Ville a semnalului $x_a(\tau)$ se concentrează perfect pe curba:

$$\omega=4\pi t=2\pi f_i(t) \tag{490}$$

Deci în cazul semnalului $x(\tau)$ din relația (487), reprezentarea timp-frecvență de tip Wigner-Ville a semnalului analitic asociat se concentrează perfect pe curba frecvenței instantanee. În continuare se consideră semnalul:

$$x(\tau)=\cos y(\tau) \tag{491}$$

Semnalul analitic asociat este:

$$x_a(\tau)=e^{j\,y(\tau)}$$

Nucleul Wigner-Ville corespunzător este:

$$K_{x_a}^{W-V}(t,\tau)=e^{j\left[y\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]}$$

Frecvența instantanee a semnalului $x(\tau)$ este:

$$f_i(\tau)=\frac{1}{2\pi}\,y'(\tau) \tag{492}$$

Un estimator al acestei funcții se obține înlocuind derivata cu diferența finită centrată:

$$\hat{f}_i(t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\;\frac{y\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}{\tau} \tag{493}$$

Se constată că:

$$K_{x_a}^{W-V}(t,\tau)=e^{j\,\hat{f}_i(t,\tau)\cdot 2\pi\tau} \tag{494}$$

Reprezentarea timp-frecvență de tipul Wigner-Ville a semnalului $x_a(\tau)$ este:

$$TF_{x_a}^{W-V}(t,\omega)=F\left\{e^{j2\pi\,\hat{f}_i(t,\tau)\tau}\right\}=2\pi\,\delta\left(\omega-2\pi\,\hat{f}_i(t,\tau)\right) \qquad (495)$$

Deci această reprezentare timp-frecvență se concentrează perfect pe estimatorul frecvenței instantanee cu diferență finită centrată.

În consecință se poate afirma că frecvența instantanee a unui semnal de tipul celui din relația (491) poate fi estimată pe baza reprezentării timp-frecvență de tipul Wigner-Ville a semnalului analitic asociat.

În continuare se face ipoteza suplimentară că faza instantanee a semnalului $x(\tau)$ are o variație polinomială:

$$y(\tau)=Q_{2m}(\tau)\,\tau \qquad (496)$$

unde $Q_{2m}(\tau)$ este un polinom de gradul 2 m.

În acest caz:

$$x_a(\tau)=e^{j\left(\tau\,Q_{2m}(\tau)\right)}$$

Se demonstrează că şi pentru astfel de semnale există o reprezentare timp-frecvență care se concentrează perfect pe curba de variație temporală a frecvenței instantanee a semnalelor $x(\tau)$ corespunzătoare. Aceasta este reprezentarea Wigner-Ville generalizată. Ea este transformata Fourier scurtă a nucleului:

$${}_gK_x^{W-V}(t,\tau)=\prod_{k=1}^{P}\left[x\left(t+c_k\tau\right)\right]^{b\,k}\left[x^*\left(t+c_{-k}\tau\right)\right]^{-b\,-k}$$

Frecvența instantanee a semnalului $x(\tau)$ este:

$$f_i(\tau)=\frac{1}{2\pi}\left[Q_{2m}(\tau)+\tau\,Q'_{2m}(\tau)\right]$$

Reprezentarea Wigner-Ville generalizată a semnalului $x_a(\tau)$ este:

$${}_gTF_{x_a}^{W-V}(t,\omega)=F\left\{e^{j\sum\limits_{\substack{k=-m\\k\neq 0}}^{m}b_k\,y\left(t+c_k\,t\right)}\right\}(\omega)$$

Printr-o bună alegere a constantelor b_k şi c_k, se poate obține:

$$ {}_{g}K_{x_a}^{W-V}(t,\ \tau) \ = \ e^{j\left(2\pi f_i(t)\right)\tau} $$

adică:

$$ {}_{g}TF_{x_a}^{W-V}(t,\ \omega) \ = \ 2\pi\delta\left(\omega - 2\pi f_i(t)\right) $$

Din păcate nu toate semnalele nestaționare au expresia din relația (491). În schimb toate reprezentările timp-frecvență prezentate în această lucrare au calitatea de a se concentra pe curba de variație în timp a frecvenței instantanee a semnalului căruia i se aplică. De asemenea, orice reprezentare timp-frecvență poate fi privită ca şi o imagine timp-frecvență. De aceea este firească ideea utilizării metodelor de prelucrare a imaginilor pentru a extrage curba frecvenței instantanee din imaginea reprezentării timp-frecvență. În figurile 20.8.4.1 şi 21.8.4.1 au fost prezentate reprezentările timp-frecvență de tipul spectrogramă Gabor adaptivă respectiv Wigner-Ville ale unui semnal a cărui frecvență instantanee este o funcție de gradul II de timp. În figurile 1.9.5.1 şi 2.9.5.1 sunt prezentate imaginile obținute prin binarizarea imaginilor din figurile 20.8.4.1 şi 21.8.4.1.

Figura 1.9.5.1. Rezultatul binarizării reprezentării Wigner-Ville a unui semnal modulat în frecvență.

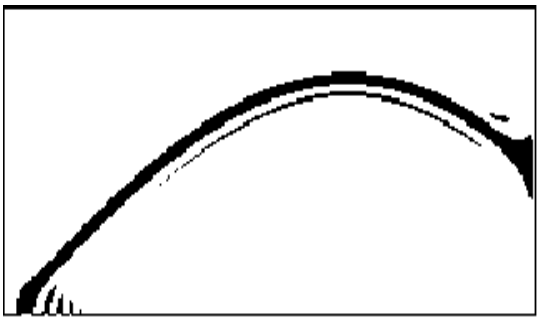


Figura 2.9.5.1. Rezultatul binarizării reprezentării de tip spectrogramă Gabor adaptivă a semnalului modulat în frecvență.

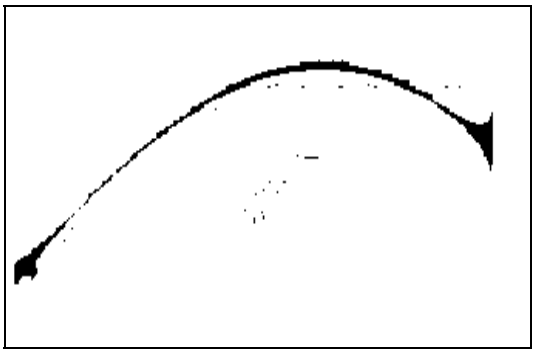


Figura 3.9.5.1. Imaginea obținută prin dilatarea imaginii din figura 1.9.5.1.

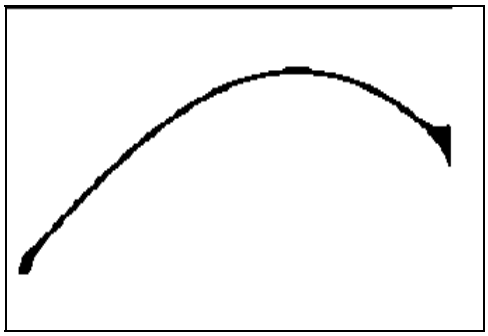


Figura 4.9.5.1. Imaginea obținută prin dilatarea imaginii din figura 2.9.5.1.

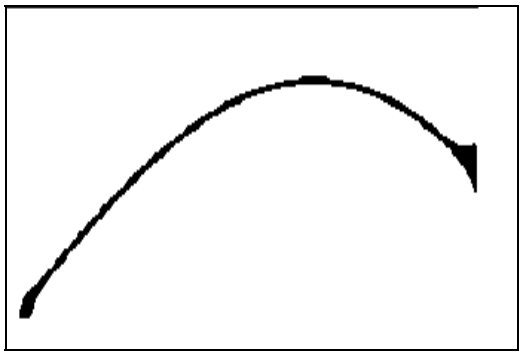


Figura 5.9.5.1. Imaginea obținută prin filtrarea mediană a imaginii din figura 3.9.5.1.

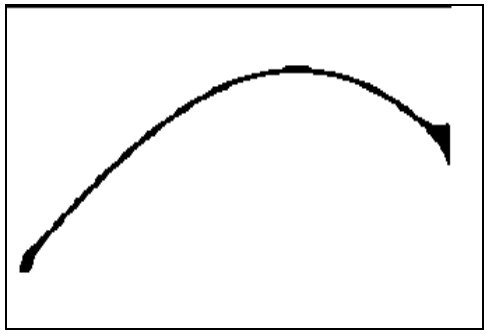


Figura 6.9.5.1. Imaginea obținută prin filtrarea mediană a imaginii din figura 4.9.5.1.

În figurile 3.9.5.1 şi 4.9.5.1 sunt prezentate imaginile obținute prin dilatarea imaginilor din figurile 1.9.5.1. şi 2.9.5.1. În sfârşit în figurile 5.9.5.1. şi 6.9.5.1 sunt prezentate imaginile obținute prin filtrarea mediană a imaginilor din figurile 3.9.5.1. şi 6.9.5.1. Se constată că ultimile două imagini prezintă curba de variație a frecvenței instantanee a semnalului analizat. De asemenea se constată dispariția termenilor de interferență din reprezentarea de tip Wigner-Ville. Iată cum poate fi obținută această curbă pornind de la imaginea unei reprezentări timp-frecvență prin aplicarea a trei operații uzuale în prelucrarea imaginilor: binarizarea, dilatarea şi filtrarea mediană. O curbă asemănătoare poate fi obținută prin interpolare folosind punctele din figura 2.8.4.3. Deci şi prin prelucrarea imaginii transformării "wavelet" continuă a semnalului de analizat poate fi măsurată frecvența instantanee a acestuia.

Metodele de estimare a frecvenței instantanee cu ajutorul reprezentărilor timp-frecvență prezentate până acum pot fi considerate ca şi tehnici de prelucrare a semnalelor în timp continuu. În continuare se prezintă metode de estimare a frecvenței instantanee folosind tehnici de prelucrare a semnalelor în timp discret. Astfel de metode sunt prezentate în [15].

Prin eşantionarea uniformă a semnalului $x(\tau)$ se obține semnalul în timp discret $x[n]$. Cu ajutorul transformării Hilbert în timp discret a semnalului $x[n]$, [10] se construieşte semnalul analitic asociat semnalului $x[n]$, $x_a[n]$. Se notează cu $\alpha[n]$ argumentul acestui semnal. Înlocuind derivata din relația de definiție a frecvenței instantanee cu o diferență finită înainte poate fi obținut următorul estimator în timp discret al frecvenței instantanee:

$$f_i[n] = \frac{1}{2\pi}\left[\alpha[n+1]-\alpha[n]\right] \tag{497}$$

Dezavantajele acestui estimator sunt:

- este polarizat,
- are dispersie mare.

O metodă de scădere a dispersiei este filtrarea semnalului $f_i[n]$. În acest mod se obţine un estimator:

$$\hat{f}_i[n] = f_i[n] * h[n]$$

unde $h[n]$ este răspunsul la impuls al filtrului folosit. O alegere potrivită pentru filtrul descris de $h[n]$ este mediatorul numeric alunecător [125].

Performanţe superioare pot fi obţinute dacă se utilizează un filtru adaptiv. În continuare se prezintă o metodă adaptivă de estimare numerică a frecvenţei instantanee.

Pasul 1. Eşantionarea adaptivă a semnalului $x(\tau)$.

Se determină trecerile prin zero ale semnalului $x(\tau)$. Se determină valoarea distanţei între două treceri succesive prin zero. Se alege în aşa fel pasul de eşantionare încât raportul dintre valoarea duratei dintre ultimele două treceri succesive prin zero ale semnalului $x(\tau)$ şi durata pasului de eşantionare folosit în acel interval de timp să fie un număr întreg.

Pasul 2. Fie $K[m]$ numărul eşantioanelor secvenţei $x_a[n]$ achiziţionate în intervalul de timp dintre ultimele două treceri prin zero consecutive ale semnalului $x(\tau)$ (a m-a trecere prin zero şi a $m+1$ -a trecere prin zero). În $K[m]$ sunt incluse şi eşantioanele la momentele la care se produc cele două treceri prin zero.

Se estimează frecvenţa instantanee obţinându-se estimata $f_{i_m}[n]$. Se filtrează adaptiv acest semnal, folosind un mediator numeric alunecător adaptiv, cu relaţia intrare-ieşire:

$$\hat{f}_i[m] = \frac{1}{2\pi K[m]} \sum_{k=0}^{K[m]-1} (\alpha[m+1] - \alpha[m-k]) \qquad (498)$$

Calculând suma din membrul drept se obţine:

$$\hat{f}_i[m] = \frac{1}{2\pi K[m]} (\alpha[m+1] - \alpha[m-K[m]+1]) \qquad (499)$$

Dar $\alpha[m+1]$ şi $\alpha[m-K[m]+1]$ reprezintă valorile argumentului semnalului $x_a[n]$ la momentele la care semnalul $x(t)$ trece prin 0. De aceea această diferenţă de argumente este egală cu π. În consecinţă relaţia (499) devine:

$$\hat{f}_i[m] = \frac{1}{2K[m]} \qquad (500)$$

Iată un estimator foarte simplu pentru frecvenţa instantanee. Pentru a aplica metoda de estimare a frecvenţei instantanee descrisă mai sus este suficient să se detecteze trecerile prin zero ale semnalului $x(\tau)$, şi să se măsoare pentru fiecare

cuplu de treceri prin zero succesive, distanţa temporală corespunzătoare. De aceea această tehnică se numeşte tehnică de măsurare continuă a frecvenţei instantanee. Metoda descrisă stă la baza construcţiei analizorului în domeniul modulaţiei HP 5371A [143]. Aceeaşi metodă este utilizată şi la construcţia unor analizoare de spectru, la firma Tektronix [138]. Metoda descrisă poate fi implementată şi folosind un numărător universal programabil şi un calculator de uz general [140]. Un astfel de echipament a fost construit şi funcţionează şi în facultatea noastră. El se bazează pe utilizarea sistemului de achiziţii de date A DA 3100, [2]. Descrierea sa poate fi găsită în [75]. În figurile 7.9.5.1. şi 8.9.5.1 sunt prezentate rezultatele utilizării acestui ultim aparat.

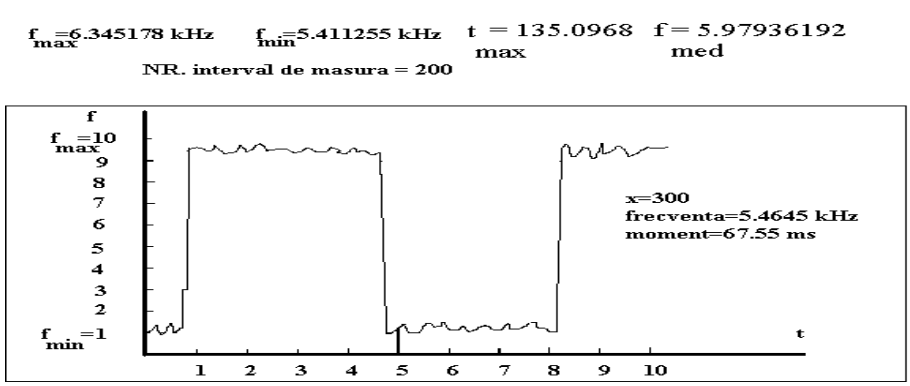


Figura 7.9.5.1 Estimarea frecvenţei instantanee a unui semnal FSK.

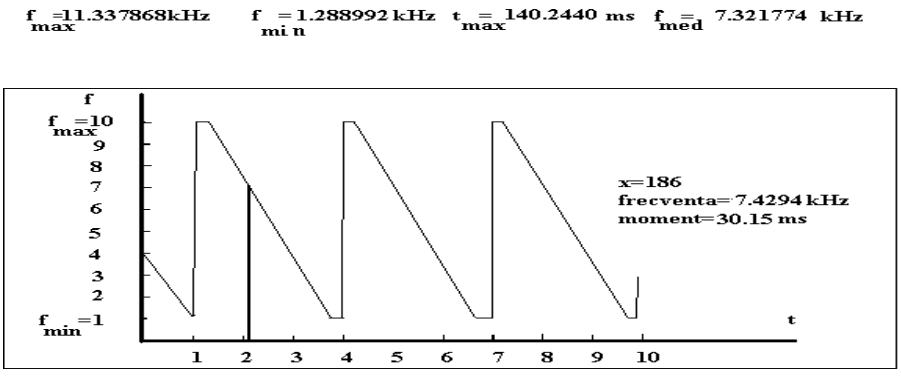


Figura 8.9.5.1 Estimarea frecvenţei instantanee a unui semnal vobulat.

În prima dintre aceste figuri este prezentată estimarea frecvenței instantanee a unui semnal FSK, iar în cea de a doua figură se prezintă estimarea frecvenței instantanee a unui semnal generat de un generator de semnal vobulat. Estimările frecvențelor instantanee cuprinse în banda [100 Hz, 20 KHz] realizate cu ajutorul acestui aparat au o precizie satisfăcătoare, erorile relative comise nedepășind valoarea de 1%.
Alți estimatori ai frecvenței instantanee bazați pe reprezentările timp-frecvență discrete sunt prezentați în [13].

9.5.2 MĂSURAREA BENZII INSTANTANEE

Această noțiune nu are încă o definiție unanim recunoscută. În continuare prin banda instantanee a unui semnal se va înțelege acea bandă de frecvență în care se concentrează majoritatea energiei acelui semnal, măsurată într-un interval scurt de timp. Cunoaşterea benzii instantanee a unui semnal este utilă pentru eşantionarea adaptivă a acestuia. Într-adevăr, frecvența de eşantionare poate fi aleasă astfel încât la fiecare moment de timp ea să reprezinte un anumit multiplu al benzii instantanee a semnalului care trebuie discretizat. Acesta este modul de lucru al circuitului de eşantionare adaptivă A.S.R (Adaptive Sampling Rate) din structura înregistratorului de forme de undă HP 5183 A [107]. Funcționarea acestui circuit se bazează pe utilizarea reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă discretă. Un sistem numeric de implementare a acestei reprezentări timp-frecvență este prezentat în figura 9.9.5.1.

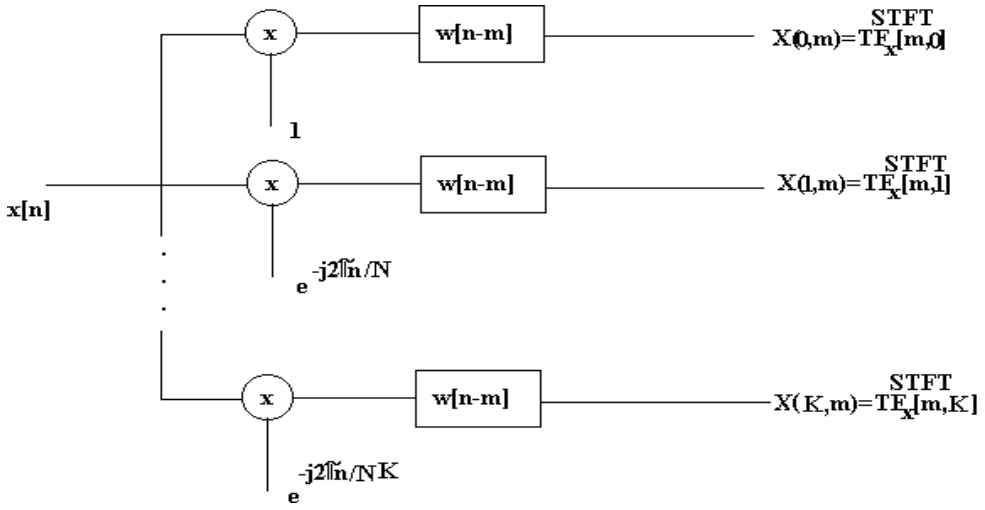


Figura 9.9.5.1 Sistem pentru calculul reprezentării timp-frecvență de tipul transformare scurtă discretă.

Semnalul de prelucrat, $x(\tau)$, se eşantionează, folosind valoarea maximă a frecvenței de eşantionare care poate fi realizată tehnologic (1 GHz în cazul aparatului HP 5183) obținându-se semnalul în timp discret $x[n]$. Cu ajutorul sistemului din figura 9.9.5.1 se calculează transformarea Fourier discretă scurtă a semnalului $x[n]$. Pe baza relației lui Parseval, se poate calcula energia instantanee a semnalului $x[n]$:

$$E[m] = \sum_{p=0}^{K} \left| X(p,m) \right|^2$$

Notând cu $f[m]$ valoarea benzii instantanee a semnalului $x[n]$, valoarea energiei instantanee cuprinsă în această bandă este:

$$E_1[m] = \sum_{p=0}^{f[m]} \left| X(p,m) \right|^2$$

Fie:

$$P[m] = \frac{\sum_{p=0}^{f[m]} \left| X(p,m) \right|^2}{E[m]}$$

pragul energetic la momentul *m*. După cum se constată valoarea lui $P[m]$ indică cantitatea din energia instantanee concentrată în banda instantanee. Condiția:

$$P[m] \geq P_o$$

asigură printr-o bună alegere a lui P_o o valoare suficientă pentru $f[m]$ în aşa fel încât aproximarea semnalului $x[n]$ prin semnalul $\hat{x}[n]$ obținut prin aplicarea transformatei Fourier scurtă discretă inversă semnalului $\{X(0,m), X(1,m), \ldots X(f[m],m)\}$ să aibă calitatea dorită. Semnalul $\hat{x}[n]$ s-ar fi obținut prin eşantionarea semnalului $x(\tau)$ cu o frecvență de eşantionare (corespunzătoare lui $f[m]$) de valoare mai mică decât valoarea frecvenței de eşantionare folosită pentru obținerea semnalului $x[n]$. De aceea se poate afirma că pentru fiecare valoare a lui *m* există o valoare corespunzătoare a frecvenței de eşantionare a semnalului $x(\tau)$. Pentru valori diferite ale lui *m* se obțin valori diferite ale frecvenței de eşantionare. Iată de ce se poate afirma că este vorba despre o eşantionare adaptivă. În consecință, semnalul $\hat{x}[n]$ se obține prin eliminarea unora dintre eşantioanele semnalului $x[n]$. Privită din acest unghi metoda de eşantionare descrisă poate fi considerată ca şi o metodă de compresie de date. În cazul în care semnalul $x(\tau)$ este un fenomen tranzitoriu, pentru înregistrarea formei sale de undă compresia datelor este foarte importantă. Într-adevăr memoria oricărui aparat de măsurare numeric are o capacitate finită. De aceea

cu cât se foloseşte o frecvenţă de eşantionare mai mare cu atât durata din semnalul tranzitoriu de înregistrat care poate fi stocată în memorie este mai scurtă. Dacă se foloseşte compresia de date atunci o durată mai lungă din semnalul de înregistrat poate fi stocată în memorie. În continuare vor fi prezentate şi alte metode de compresie de date bazate pe utilizarea reprezentărilor timp-frecvenţă.

9.5.3 COMPRESIA DATELOR ÎN APARATURA DE MĂSURARE

Există mai multe metode de compresie a datelor:
- prin codare cu pas variabil,
- prin modulare diferenţială în impulsuri şi codare,
- prin codare în subbenzi (un exemplu a fost expus anterior),
- prin transformări ortonormale.

În continuare se studiază ultima metodă. Este vorba despre o compresie de date cu pierdere de informaţie controlată. Rolul transformării ortogonale este de a decorela semnalul care trebuie compresat. Prin decorelare, fiecare eşantion din semnalul obţinut va purta doar informaţia propice, nu şi informaţii specifice eşantioanelor vecine. În acest mod prin eliminarea unor eşantioane nu se pierde decât informaţia purtată de acestea (nefiind deloc afectată informaţia purtată de eşantioanele rămase).

Transformarea ortogonală care realizează decorelarea maximă este transformarea Karhunen-Loeve. În continuare se prezintă această transformare. În acest scop se consideră semnalul aleator $x(\tau)$, de durată D şi se urmăreşte descompunerea sa în serie conform formulei:

$$x(\tau) = \underset{N\to\infty}{l.i.m.} \sum_{k=1}^{N} a_k \, \eta_k(\tau) , \qquad 0 \le \tau \le D \tag{501}$$

unde limita este în medie pătratică, iar funcţiile $\eta_k(\tau)$ sunt ortogonale. Este interesantă aproximarea semnalului $x(\tau)$ prin semnalul $x_N(\tau)$ cu:

$$x_N(\tau) = \sum_{k=1}^{N} a_k \, \eta_k(\tau) , \qquad 0 \le \tau \le D \tag{501'}$$

Se doreşte construcţia acestei aproximări în aşa fel încât semnalul în timp discret a_k să nu aibă elemente corelate.

Relaţia (501) poate fi pusă în forma:

$$\lim_{N\to\infty} E\left\{ \left(x_N(\tau) - x(\tau) \right)^2 \right\} = 0 \tag{502}$$

unde cu E s-a notat operatorul de mediere statistică. Coeficienții a_k se calculează cu relația:

$$a_k = \int_0^D x(\tau)\,\eta_k^*(\tau)\,d\tau \tag{503}$$

Dacă valoarea medie statistică a semnalului $x(\tau)$ este nulă atunci:

$$\mathrm{E}\{a_k\} = \int_0^D \mathrm{E}\{x(\tau)\}\,\eta_k^*(\tau)\,d\tau = 0\,, \quad (\forall)\, k \in Z \tag{503'}$$

Dacă coeficienții a_k sunt necorelați atunci:

$$\mathrm{E}\{a_k\, a_l^*\} = \lambda_k\, \delta[k-l] \tag{504}$$

adică:

$$\mathrm{E}\left\{\int_0^D x(\tau)\,\eta_k^*(\tau)\,d\tau \cdot \int_0^D x^*(u)\,\eta_l(u)\,du\right\} = \lambda_k\, \delta[k-l]$$

sau:

$$\int_0^D \eta_l(u)\left(\int_0^D \mathrm{E}\{x(\tau)\,x^*(u)\}\,\eta_k^*(\tau)\,d\tau\right) du = \lambda_k\, \delta[k-l]$$

Dar, $\mathrm{E}\{x(\tau)\,x^*(u)\}$ reprezintă autocorelația semnalului aleator $x(\tau)$, $\mathrm{r_{xx}}(\tau, u)$. Ultima relație devine:

$$\int_0^D \eta_l(u)\left(\int_0^D \mathrm{r_{xx}}(\tau, u)\,\eta_k^*(\tau)\,d\tau\right) du = \lambda_k\, \delta[k-l] \tag{504'}$$

Ținând seama de ortogonalitatea funcțiilor $\eta_k(\tau)$ rezultă că ultima relație este satisfăcută şi dacă:

$$\int_0^D \mathrm{r_{xx}}(\tau, u)\,\eta_k^*(\tau)\,d\tau = \lambda_k\, \eta_k^*(u)$$

sau, deoarece funcția de autocorelație este reală:

$$\int_0^D r_{xx}(\tau, u)\,\eta_k(\tau)\,d\tau = \lambda_k\,\eta_k(u) \tag{505}$$

S-a obținut în acest mod o ecuație integrală de tip Fredholm. $R_x(\tau, u)$ reprezintă nucleul ecuației, $\eta_k(\tau)$ sunt funcțiile proprii iar λ_k valorile proprii.

Cunoscând autocorelația semnalului de descompus $x(\tau)$, $R_x(\tau, u)$ se poate rezolva ecuația (505), determinându-se funcțiile $\eta_k(\tau)$ şi constantele λ_k. Se poate demonstra că transformarea Karhunen-Loeve, definită în relația (501') minimizează eroarea medie pătratică de aproximare:

$$E(e^2) = E\left\{\left(x(\tau) - x_N(\tau)\right)^2\right\} \tag{506}$$

Cu alte cuvinte, nu există o altă transformare (descompunere) descrisă printr-o sumă cu N termeni care să conducă la o eroare medie pătratică de aproximare a lui $x(\tau)$ decât transformare Karhunen-Loeve.

În continuare se prezintă două exemple. Pentru început se consideră că semnalul $x(\tau)$ este un zgomot alb. În acest caz:

$$r_{xx}(\tau, u) = \delta(\tau, u)$$

Înlocuind în relația (504') se obține:

$$\int_0^D \eta_l(u)\left(\int_0^D \delta(\tau, u)\,\eta_k^*(\tau)\,d\tau\right)du = \lambda_k\,\delta[k-l]$$

adică:

$$\eta_l(0)\,\eta_k^*(0) = \lambda_k\,\delta[k-l] \tag{507}$$

Deci:

$$\lambda_l = \left|\eta_l(0)\right|^2 = E\left\{\left|a_l\right|^2\right\} = \sigma_l^2$$

Având în vedere relațiile (503') şi (507) se poate scrie:

$$E\{a_k \cdot a_l^*\} = E\{a_k\}\,E\{a_l^*\} = 0, \quad k \neq l$$

Rezultă că eşantioanele semnalului a_k nu sunt numai decorelate ci sunt şi independente. Aceasta explică ideea utilizării transformării Karhunen-Loeve la compresia de date. O clasă largă de semnale aleatoare staționare cu funcția de autocorelație de forma:

$$r_{xx}(\tau, u) = e^{-|\tau - u|} = r_x(\tau - u) = r_x(v) \tag{508}$$

În acest caz ecuația Fredholm asociată (relația 505') devine:

$$\int_0^D e^{-|\tau - u|} \eta_k(u)\, du = \lambda_k \eta_k(\tau) \tag{509}$$

Soluțiile acestei ecuații sunt:

$$\eta_k(\tau) = e^{j k \omega_o \tau}; \quad \lambda_k = \frac{2}{1 + k^2 \omega_o^2} \tag{510}$$

Iată sursa interesului pentru dezvoltările în serie Fourier.

Fiind vorba despre date este interesantă transformarea Karhunen-Loeve a semnalelor în timp discret. Semnalul de transformat, $x[n]$ de durată N poate fi exprimat în forma:

$$x^T = [x[0]\ x[1]\ \ldots x[N-1]]$$

Fie T o transformare ortogonală. Aplicând această transformare semnalului $x[n]$ se obține:

$$X = Tx$$

unde:

$$X^T = [X[0]\ X[1]\ \ldots X[N-1]]$$

Transformarea T poate fi descrisă matricial cu ajutorul matricei T, definită prin:

$$T^T = [\eta_o\ \eta_1\ \ldots \eta_{N-1}]$$

unde $\eta_k, k = \overline{0, N-1}$ sunt vectori ortogonali:

$$\eta_k^T \cdot \eta_l = \delta[k - l]$$

Transformarea inversă T^{-1} este descrisă matricial cu ajutorul transpusei matricei T, T^T. Se poate scrie:

$$x = T^T X = \left[\eta_0 \ \eta_1 \ \ldots \eta_{N-1}\right] X = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \ \eta_k \tag{511}$$

O compresie de date poate fi obținută dacă se reduce dimensiunea spațiului transformat de la N la M (M<N). Expresia semnalului compresat este:

$$x_M = \sum_{k=0}^{M-1} X[k] \ \eta_k \tag{512}$$

Eroarea de aproximare a lui x prin x_M este:

$$\Delta x = x - x_M = \sum_{k=M}^{N-1} X[k] \ \eta_k \tag{513}$$

Eroarea medie pătratică de aproximare este:

$$\varepsilon = E\left\{\|\Delta x\|^2\right\} = E\left\{\sum_{k=M}^{N-1} \sum_{l=M}^{N-1} X[k] \, X[l] \ \eta_k^T \, \eta_l\right\}$$

Ținând seama de ortogonalitatea vectorilor η_k ultima relație devine:

$$\varepsilon = \sum_{k=M}^{N-1} E\left\{X^2[k]\right\} \tag{514}$$

Deoarece semnalul aleator de la intrare $x[n]$ este caracterizat statistic prin intermediul matricei sale de covarianță, este utilă exprimarea erorii medii pătratice cu ajutorul acestei matrice:

$$C_x = E\left\{x x^T\right\}$$

Ținând seama de relația (513) şi ortogonalitatea vectorilor η_k se poate scrie:

$$X[k] = \varphi_k^T \cdot x$$

De aceea relația (514) devine:

$$\varepsilon = \sum_{k=M}^{N-1} E\left\{\varphi_k^T \cdot x \left(\varphi_k^T \cdot x\right)^T\right\} = \sum_{k=M}^{N-1} \varphi_k^T E\left\{x x^T\right\} \varphi_k \tag{515}$$

adică:

$$\varepsilon = \sum_{k=M}^{N-1} \varphi_k^T C_x \varphi_k \tag{516}$$

Fiind cunoscută matricea C_x trebuie determinați vectorii ortogonali φ_k şi transformarea T care minimizează eroarea medie pătratică, ε .

Această problemă se rezolvă în [130] folosind metoda multiplicatorilor lui Langrange. Se ajunge la sistemul de ecuații matriciale:

$$C_x \eta_k = \lambda_k \eta_k \tag{517}$$

Deci vectorii η_k sunt vectori proprii ai matricei de covarianță a semnalului *x*.

Valoarea minimă a erorii medii pătratice este:

$$\varepsilon_{min} = \sum_{k=M}^{N-1} \lambda_k \tag{518}$$

Transformarea definită de relația (517) se numeşte transformarea Karhunen-Loeve a semnalului în timp discret $x[n]$.

În continuare se prezintă o legătură între transformările Karhunen-Loeve în timp continuu şi în timp discret.

Relația (505) poate fi rescrisă în forma:

$$\left\langle r_x(\tau, u), \eta_k(\tau) \right\rangle_{L^2} = \lambda_k \eta_k(u) \tag{519}$$

Cu notația:

$$r_x(m, n) = C_x[m, n]$$

relația (519) poate fi rescrisă în forma:

$$\left\langle C_x[m,n], \eta_k[n] \right\rangle_{l^2} = \lambda_k \eta_k[m], \quad m = \overline{0, N-1} \tag{520}$$

sau matricial:

$$\begin{bmatrix} C_x[0,0] & C_x[0,1] & \cdots & C_x[0,N-1] \\ C_x[1,0] & C_x[1,1] & \cdots & C_x[1,N-1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_x[N-1,0] & C_x[N-1,1] & \cdots & C_x[N-1,N-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_k[0] \\ \eta_k[1] \\ \vdots \\ \eta_k[N-1] \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{bmatrix} \eta_k[0] \\ \eta_k[1] \\ \vdots \\ \eta_k[N-1] \end{bmatrix} \tag{521}$$

adică:

$$C_x \eta_k = \lambda_k \eta_k \tag{522}$$

Ultima relație este identică cu relația (517).

Dar coeficienții a_k sunr necorelați. Rezultă pe baza observației de mai sus că şi coeficienții $X[k]$ sunt necorelați. De aceea se poate afirma că matricea C_x este diagonală. Conform relației (522) rezultă că:

$$C_x = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{N-1} \end{bmatrix} \tag{523}$$

Compresia semnalului $X[k]$, $k = \overline{0, M-1}$ se poate realiza reținând primele M valori din acest semnal. Se obține semnalul comprimat:

$$X_c[k] = \begin{cases} X[k], & k = \overline{0, M-1} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Numărul N-M de eşantioane $X[k]$ care pot fi neglijate corespunde la numărul de coeficienți λ_k ai matricei de covarianță C_x care pot fi neglijați.

Din păcate nu există algoritmi rapizi pentru calculul transformării Karhunen-Loeve a unui semnal. De aceea este dificilă determinarea vectorilor proprii ai matricei de covarianță. În practică se utilizează transformări ortogonale suboptimale. Acestea ating doar asimptotic performanțele transformării Karhunen-Loeve dar beneficiază de implementări bazate pe algoritmi rapizi. Printre aceste transformări suboptimale figurează:

- transformarea Walsh-Hadamard (prezentată în [130]),
- transformarea cosinus discretă DCT,
- transformarea wavelet discretă.

Convergența asimptotică a transformării DCT spre transformarea Karhunen-Loeve este demonstrată în [104]. În continuare se demonstrează convergența transformării "wavelet" discretă spre transformarea Karhunen-Loeve.

Fie semnalul aleator $x(\tau)$. Proiecțiile acestui semnal pe descompunerea ortogonală a lui $L^2(R)$, $\{W_m\}_{m \in Z}$, generată de funcția "wavelets mother" $\psi(\tau)$ sunt semnale ale căror descompuneri în bazele $\{\psi_{m,n}(\tau)\}_{n \in Z}$ au coeficienții $d_m[n]$:

$$d_m[n] = \langle x(\tau), \psi_{m,n}(\tau) \rangle$$

Se calculează corelațiile semnalelor $d_m[n]$:

$$r_{d_m}[k,\ l] = E\left\{d_m[k],\ d_m^*[l]\right\} = E\left\{\left\langle x(\tau),\ \psi_{m,\,k}(\tau)\right\rangle,\ \left\langle x(\tau),\ \psi_{m,\,1}(\tau)\right\rangle^*\right\} =$$

$$= E\left\{\int_R x(\tau)\,\psi_{m,\,k}^*(\tau)\,d\tau \int_R x^*(u)\,\psi_{m,\,1}(u)\,du\right\} =$$

$$= E\left\{\int_{R^2} x(\tau)\,x^*(u)\,\psi_{m,\,k}^*(\tau)\,\psi_{m,\,1}(u)\,du\,d\tau\right\} =$$

$$= \int_{R^2} E\left\{x(\tau)\,x^*(u)\right\}\psi_{m,\,k}^*(\tau)\,\psi_{m,\,1}(u)\,du\,d\tau$$

Dacă semnalul $x(\tau)$ este staționar atunci:

$$E\left\{x(\tau)\,x^*(u)\right\} = r_{xx}(\tau - u)$$

În consecință:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \int_{R^2} r_{xx}(\tau - u)\,\psi_{m,\,k}^*(\tau)\,\psi_{m,\,1}(u)\,du\,d\tau =$$

$$\int_R \psi_{m,\,k}^*(\tau) \int_R \psi_{m,\,1}(u)\,r_{xx}(\tau - u)\,du = \int_R \left(r_{xx}(\tau) * \psi_{m,\,1}(\tau)\right)\psi_{m,\,k}^*(\tau)\,d\tau$$

sau pe baza relației lui Parseval:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi}\int_R F\left\{r_{xx}(\tau) * \psi_{m,\,1}(\tau)\right\}(\omega)\ \ F^*\left\{\psi_{m,\,k}^*(\tau)\right\}(\omega)\,d\omega$$

Admițând că se lucrează cu funcții "wavelet" reale, ultima relație devine:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi}\int_R F\left\{r_x x(\tau)\right\}(\omega)\ F\left\{\psi_{m,\,1}(\tau)\right\}(\omega)\ F^*\left\{\psi_{m,\,k}(\tau)\right\}(\omega)\,d\omega$$

Dar:

$$F\left\{\psi_{m,\,1}(\tau)\right\}(\omega) = 2^{-\frac{m}{2}}\,e^{-j\omega 2^{-m}1}\,F\left\{\psi\right\}\left(2^{-m}\omega\right)$$

Deci:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi} \int_R F\{r_{xx}(\tau)\}\ (\omega)\ 2^{-\frac{m}{2}}\ e^{-j\,\omega\,2^{-m}\,l}\ .$$

$$F\{\psi\}\left(2^{-m}\omega\right) 2^{-\frac{m}{2}}\ e^{j\,\omega\,2^{-m}\,k}\ F^{*}\{\psi\}\left(2^{-m}\omega\right) d\omega$$

adică:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi}\int_R F\{r_{xx}(\tau)\}\ (\omega)\ 2^{-m}\ e^{-j\,\omega\,2^{-m}\,(l-k)}\ \left|F\{\psi\}\left(2^{-m}\omega\right)\right|\ \Big|^2 d\omega$$

Integrala din membrul drept se poate descompune într-o serie de integrale calculate pe intervale de lungime 2π:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\int_{(2p-1)\,\pi}^{(2p+1)\,\pi} F\{r_{xx}(\tau)\}\ (\omega)\ 2^{-m}\ e^{-j\,\omega\,2^{-m}\,(l-k)}\ \left|F\{\psi\}\left(2^{-m}\omega\right)\right|^2 d\omega$$

Cu schimbarea de variabilă:

$$v = 2^{-m}\omega$$

ultima relație devine:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\int_{(2p-1)\,\pi}^{(2p+1)\,\pi} F\{r_{xx}(\tau)\}\left(2^{m}v\right) e^{-j\ (l-k)}\ \left|F\{\psi\}\ (v)\right|^2 dv$$

Cu schimbarea de variabilă:

$$w = v - 2p\pi$$

rezultă:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} F\{r_{xx}(\tau)\}\left(2^{m}\left(w+2p\pi\right)\right) e^{-j\,w\,(l-k)}\left|F\{\psi\}\left(w+2p\pi\right)\right|^2 dw$$

sau:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty} F\{r_{xx}(\tau)\}\left(2^{m}\left(w+2p\pi\right)\right) e^{-j\,w\,(l-k)}\left|F\{\psi\}\left(w+2p\pi\right)\right|^2 dw \qquad (524)$$

Dacă semnalul aleator $x(\tau)$ este un zgomot alb de valoare medie nulă şi dispersie unitară atunci:

$$F\{r_{xx}(\tau)\}\left(2^{m}\left(w+2p\pi\right)\right) = 1, \quad (\forall)\ w \in R$$

În acest caz, relația (524) devine:

$$r_{d_m}[k,l] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| F\{\psi\}(w + 2p\pi) \right|^2 e^{-j\,w\,(l-k)}\, dw \qquad (525)$$

Dar în paragraful 7.1.2.1 s-a demonstrat, relația (178) conform căreia în cazul funcțiilor "wavelet" ortogonale:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| F\{\psi\}(w + 2p\pi) \right|^2 = 1$$

Ultima relație devine:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\,w\,(l-k)}\, dw$$

În consecință:

$$r_{d_m}[k,\ l] = \delta[k-l]$$

Cu alte cuvinte, dacă $x(\tau)$ este un zgomot alb atunci toate semnalele $d_m[n]$ sunt zgomote albe în timp discret. Deci prin aplicarea transformatei wavelet discretă unui semnal în timp discret de tip zgomot alb se obțin tot semnale în timp discret de tip zgomot alb. Evident eşantioanele acestor semnale sunt necorelate. Deci transformarea wavelet discretă ortogonală se comportă la fel ca şi transformarea Karhunen-Loeve la prelucrarea semnalelor în timp discret de tip zgomot alb, indiferent de tipul funției "wavelet" utilizată. Se trece la lmită pentru *m* tinzând la $-\infty$, în cei doi membri ai relației (524). Se obține:

$$r_{d_{-\infty}}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F\{r_{xx}(\tau)\}(0)\, e^{-j\,w\,(l-k)} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| F\{\psi\}(w + 2p\pi) \right|^2 dw$$

sau:

$$r_{d_{-\infty}}[k,\ l] = \frac{1}{2\pi}\ F\{r_{xx}(\tau)\}\ (0) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\,w\,(l-k)} dw\ =\ F\{r_{xx}(\tau)\}\ (0)\ \delta[k-l] \quad (526)$$

Deci semnalul $d_{-\infty}[n]$ este un zgomot alb în timp discret. Eşantioanele sale sunt în consecință necorelate. Se poate aşadar afirma că transformarea "wavelet" discretă converge asimptotic la transformarea Karhunen-Loeve. Demonstrația de mai sus a fost reprodusă din [78]. O analiză asemănătoare pentru pachete de funcții "wavelet" este prezentată în [10]. Iată de ce este recomandată utilizarea transformării "wavelet"

discretă la compresia datelor. În [33] se demonstrează că oricare ar fi semnalul care trebuie compresat există o anumită funcție "wavelet" care poate conduce la realizarea unei compresii superioare celei care s-ar putea obține folosind transformarea cosinus discretă. Este vorba de obținerea unui factor de compresie superior la erori de aproximare egale. În [4] este prezentată o metodă de compresie cu pierdere de informație controlată. Această metodă are următorii paşi:

1. Se calculează transformarea "wavelet" discretă directă a semnalului care trebuie prelucrat, $x[n]$, $y[n]$.
2. Se realizează compresia propriuzisă prin înlăturarea acelor eşantioane ale semnalului obținut la pasul anterior care sunt mai mici decât un prag impus.
3. Se calculează transformarea "wavelet" discretă inversă obținându-se semnalul $\hat{x}[n]$.

Pragul de la pasul 2 se impune într-un mod adaptiv. El se alege în aşa fel încât eroarea medie pătratică de aproximare a semnalului $x[n]$ prin semnalul $\hat{x}[n]$ să nu depăşească un procent din energia semnalului $x[n]$.

Sunt valabile relațiile:

$$E_x = \sum_{k=0}^{N-1} x^2[k] = \sum_{k=0}^{N-1} y^2[k] \tag{527}$$

$$E_{\hat{x}} = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}^2[k] = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{y}^2[k] \tag{528}$$

deoarece orice transformare ortogonală conservă energia [130].

De asemenea se poate scrie:

$$\hat{y}[n] = \begin{cases} y[n], \ daca \ |y[n]| > P \\ 0, \ in \ rest \end{cases}$$

Fie ${}_o\hat{y}[n]$ secvența obținută prin ordonarea descrescătoare a eşantioanelor semnalului $\hat{y}[n]$. Eroarea medie pătratică de aproximare a semnalului $x[n]$ prin semnalul $\hat{x}[n]$ este proporțională cu:

$$\varepsilon = \sum_{k=M}^{N-1} {}_o\hat{y}^2[k]$$

Valoarea lui M se obține prin rezolvarea ecuației:

$$\max_{M \in Z} \varepsilon = \frac{E_x}{100}$$

În continuare se prezintă câteva exemple de aplicare a acestei metode. În figurile 1.9.5.3, 2.9.5.3 şi 3.9.5.3 sunt prezentate trei exemple de semnale de compresat, $x[n]$ (în partea de sus a figurilor) şi corespunzătoare $\hat{x}[n]$ (în partea de jos a figurii). În cazul fiecărui semnal compresat este indicat numărul de eşantioane din care a fost reconstruit semnalele $\hat{x}[n]$. Se constată că s-au obținut valori mari ale factorilor de compresie. Toate semnalele $x[n]$ din aceste exemple au 512 eşantioane.

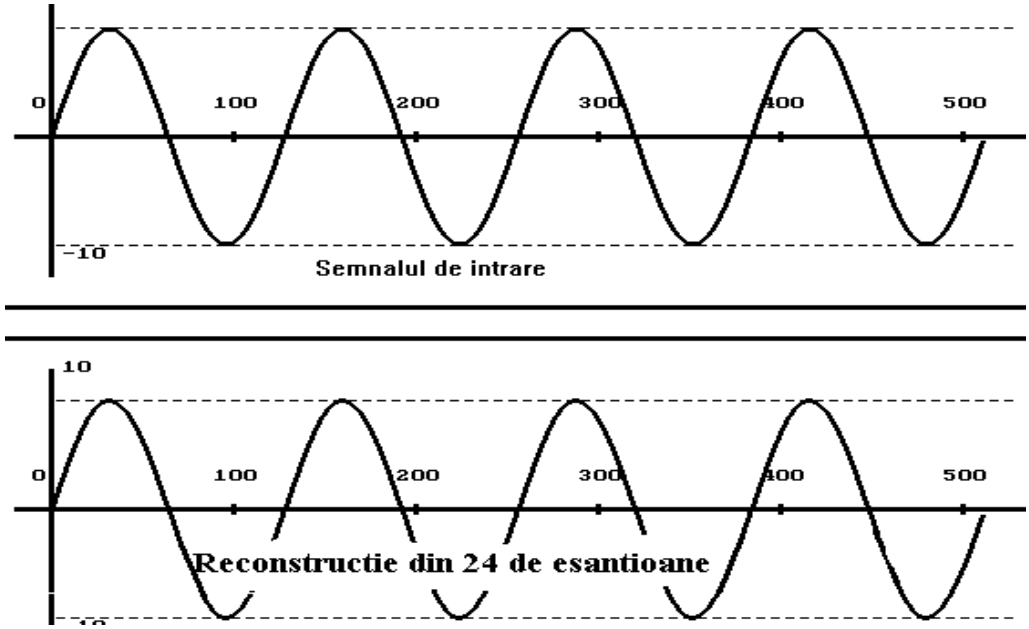


Figura 1.9.5.3. Compresia unui semnal sinusoidal. Factorul de compresie este 10,66.

Recent a fost construit un nou dicționar timp-frecvență de baze ortonormale asemănător dicționarelor de pachete de funcții "wavelet". Elementele acestui dicționar se generează cu ajutorul unor transformări Karhunen-Loeve localizate. Şi în acest dicționar elementele necesare pentru descompunerea unui anumit semnal pot fi găsite folosind algoritmul de căutare al celei mai bune baze prezentat în paragraful 8.3, [34]. În [23] se demonstrează superioritatea transformării "wavelet" discretă asupra transformării Karhunen-Loeve la compresia semnalelor care pot fi modelate prin procese aleatoare ne-Gaussiene.

Evident, compresia de date este un procedeu utilizat nu numai în metrologie ci şi în alte domenii tehnice, ca de exemplu în telecomunicații. În continuare se vor trece în revistă câteva aplicații ale reprezentărilor timp-frecvență în telecomunicații.

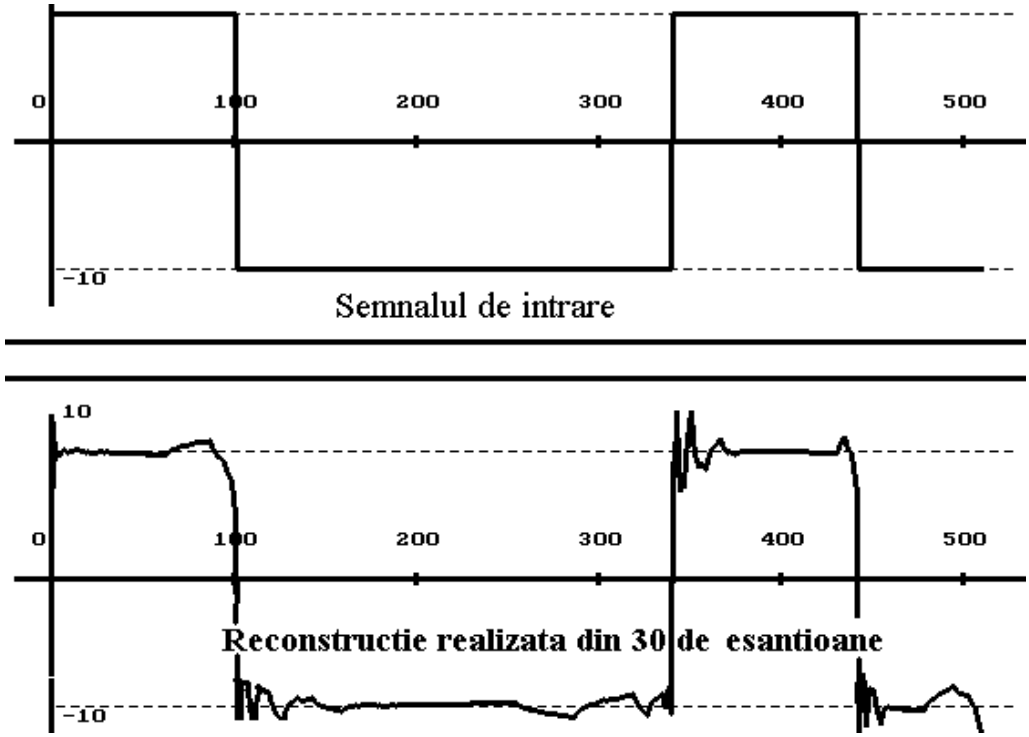


Figura 2.9.5.3. Compresia unui semnal dreptunghiular. Factorul de compresie este 8,53.

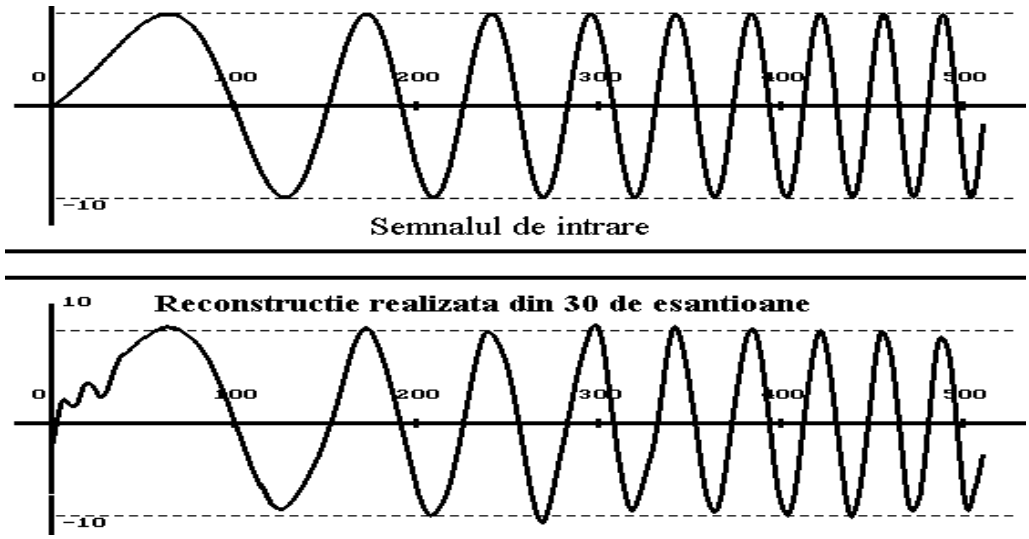


Figura 3.9.5.3. Compresia unui semnal modulat în frecvență. Factorul de compresie este 8,53.

9.6 APLICAŢII ÎN TELECOMUNICAŢII

Pe lângă aplicaţiile în RADAR ale reprezentărilor timp-frecvenţă există şi alte aplicaţii ale acestora în domeniul telecomunicaţiilor. De exemplu şi în telefonia numerică este util procedeul de compresie a datelor. De această dată este însă vorba despre prelucrarea semnalului vocal.

9.6.1 APLICAŢIILE REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENŢĂ LA PRELUCRAREA SEMNALULUI VOCAL

Există două scopuri majore în prelucrarea semnalului de vorbire:
- analiza semnalului pentru recunoaşterea vorbirii,
- sinteza numerică a semnalului de vorbire.

Practic toate aspectele comunicării prin vorbire pot beneficia de rezultatele analizei timp-frecvenţă. Orice sistem de analiză, codare sau sinteză de vorbire prelucrează succesiv segmente de vorbire având durate de ordinul a 64 de milisecunde, în ipoteza că fiecare segment de semnal este staţionar.

O prezentare a ultimilor realizări ale reprezentărilor timp-frecvenţă în prelucrarea vorbirii este făcută în [113]. Una dintre dificultăţile întâlnite la compresia semnalului vocal este presegmentarea acestuia. Într-adevăr, având în vedere redundanţa acestui semnal, chiar şi cuvintele cele mai simple sunt descrise numeric cu ajutorul unui număr mare de eşantioane. De aceea trebuiesc folosite metode de codare care să lucreze pe blocuri. Semnalul de prelucrat este împărţit în blocuri. Succesiv, fiecărui bloc i se aplică metoda de compresie. Bineînţeles că ar fi de dorit ca fiecare bloc să reprezinte un semnal cvasistaţionar. O astfel de segmentare a semnalului de analizat poate fi realizată cu ajutorul unui pachet de funcţii "wavelet" de tip Malvar. Această metodă de segmentare este prezentată în [144].

Metoda presupune descompunerea semnalului de analizat în cea mai bună bază a unui pachet de funcţii "wavelet" de tip Malvar. Găsirea celei mai bune baze se realizează prin minimizarea entropiei. Această descompunere realizează o segmentare implicită a semnalului de analizat.

O descompunere în forme de undă Malvar a semnalului $x(\tau)$ asociată partiţiei intervalului $[0,T]$:

$$[0,T] = \bigcup_k I_k$$

cu:

$$I_k = [a_k, a_{k+1}]$$

este descrisă de relația:

$$x(\tau) = \sum_{m,k} c_{m,k}\, \psi_{m,k}(\tau) \tag{529}$$

unde:

$$\psi_{m,k}(\tau) = w_m(\tau)\, g_{m,k}(\tau) \tag{530}$$

și:

$$g_{m,k}(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|I_m|}} \cos\frac{\pi}{|I_m|}\left(k + \frac{1}{2}\right)(\tau - a_m) \tag{531}$$

cu:

$$w_m(\tau) = \begin{cases} b_m(\tau), & \tau \in [a_m - r, a_m + r] \\ 1, & \tau \in [a_m + r, a_{m+1} - r] \\ b_{m+1}(2a_{m+1} - \tau), & \tau \in [a_{m+1} - r, a_{m+1} + r] \end{cases} \tag{532}$$

unde:

$$b_m(\tau) = \sin\left[\frac{\pi}{4}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{(\tau - a_m)}{r}\right)\right)\right] \tag{533}$$

Fie U_m un șir de operatori definiți pe $L^2[a_m - r, a_m + r]$, care transformă semnalul $x(\tau)$ în șirul de funcții:

$$U_m\{x(\tau)\} = \begin{cases} b_m(\tau)\, x(\tau) + b_m(2a_m - \tau)\, x(2a_m - \tau), & \tau \in (a_m,\ a_m + r] \\ b_m(2a_m - \tau)\, x(\tau) - b_m(\tau)\, x(2a_m - \tau), & \tau \in [a_m - r,\ a_m) \end{cases} \tag{534}$$

Se poate scrie:

$$U_m\{x(\tau)\} = \sum_k d_{m,k}\, \varphi_{m,k}(\tau) \tag{535}$$

unde:

$$\varphi_{m,k}(\tau) = \chi_{I_m}(\tau)\, g_{m,k}(\tau) \tag{536}$$

Cu $\chi_{I_m}(\tau)$ s-a notat funcția caracteristică a intervalului I_m. iar $U_m\{x(\tau)\}$ reprezintă produsul segmentării semnalului $x(\tau)$ corespunzător intervalului I_m. În continuare se consideră că semnalul $x(\tau)$ este definit pe $[0, T]$. Acest interval suferă următoarea împărțire:

$$\begin{aligned} I_o^o &= [0, T] \\ I_o^1 &= [0, T/2]; \quad I_1^1 = [T/2, T] \\ I_o^{11} &= [0, T/4]; \quad I_0^{12} = [T/4, T/2] \\ I_1^{11} &= [T/2, 3T/4]; \quad I_1^{12} = [3T/4, T] \end{aligned} \tag{537}$$

Se consideră funcțiile "wavelet" de tip Malvar (obținute prin particularizarea relației (531) corespunzătoare partiției (537)) şi acestea se constituie într-un pachet de funcții "wavelet". Căutând cea mai bună bază în acest pachet, folosind criteriul de minimizare a entropiei, se obține mulțimea $\{U_m\{x(\tau)\}\}_{m\in I}$. Fiecare element al acestei mulțimi reprezintă un segment ,corespunzător unui anumit interval al partiției descrisă de relația (537) al semnalului $x(\tau)$. Fiecare astfel de segment reprezintă un semnal cvasistaționar. Oricare dintre aceste semnale poate fi ulterior compresat. Tehnica descrisă anterior este dezvoltată în [44]. O altă extindere a metodei de segmentare şi compresie descrisă mai sus este prezentată în [134]. Au fost construite chiar şi analize multirezoluție segmentate respectiv baze de funcții "wavelet" segmentate [52]. Metoda de segmentare descrisă mai sus poate fi utilizată şi în cazul semnalelor ECG [78]. O trecere în revistă a pricipalelor tehnici de segmentare şi compresie a semnalelor bazate pe funcții "wavelet" utilizate în telecomunicații este prezentată în [118]. Teoria funcțiilor "wavelet" are un puternic impact asupra tehnicilor de compresie. Aceste tehnici au făcut deja posibilă includerea teoriei funcțiilor "wavelet" în standarde. Un exemplu este standardul MUSICAM pentru "CD"-urile audio de calitate. Un parametru atractiv al acestei tehnici de compresie este posibilitatea decompresiei parțiale. Dacă nu se efectuează toate iterațiile algoritmului de transformare "wavelet" inversă, necesar la decompresie, atunci rezultatul este o aproximare de rezoluție inferioară a semnalului care a fost compresat. Această posibilitate este interesantă în aplicațiile care asociază operațiile de compresie şi de transmisie. Atât transformarea ortogonală directă (folosită la compresie) cât şi transformarea ortogonală inversă (folosită la decompresie) pot fi implementate cu bănci de filtre. În cazul compresiei semnalului de vorbire trebuie să se țină seama de fiziologia urechii. De aceea sunt utile transformări ortogonale mixte: de tip transformare Fourier scurtă în banda [20, 500] Hz şi de tip "wavelet" la frecvențe peste 500 Hz.

Teoria funcțiilor "wavelet" poate fi utilizată şi pentru codarea semnalului vocal. O astfel de aplicație este descrisă în [131]. Avantajul utilizării funcțiilor "wavelet" constă în acea că pe lângă codarea propriu zisă se realizează şi o îmbunătățire a raportului semnal / zgomot al semnalului care trebuie codat.

În continuare se prezintă modul în care pot fi folosite funcțiile "wavelet" la înbunătățirea raportului semnal / zgomot.

9.6.2 ÎMBUNĂTĂȚIREA RAPORTULUI SEMNAL / ZGOMOT FOLOSIND FUNCȚIILE "WAVELET"

Operația de îmbunătățire a raportului semnal/zgomot este o operație de bază în domeniul telecomunicațiilor. În [76] se face o trecere în revistă a tehnicilor clasice de îmbunătățire a raportului semnal / zgomot.

Transformarea "wavelet" discretă poate fi folosită la îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot în cazul semnalelor perturbate aditiv. În acest scop se foloseşte o metodă propusă de David Donoho, care are trei etape:

1. se calculează transformarea "wavelet" discretă a semnalului perturbat,
2. se filtrează rezultatul,
3. se calculează transformarea "wavelet" inversă.

Succesul acestei metode este datorat proprietății de decorelare a transformării "wavelet" discretă care a fost descrisă în paragraful 9.5.3. Datorită acestei proprietăți, oricare ar fi natura zgomotului care perturbă semnalul util, în domeniul transformatei semnalul perturbator tinde să fie un zgomot alb, [17]. Se cunosc numeroase metode de filtrare pentru diminuarea efectului perturbator al zgomotului alb. De asemenea, datorită naturii statistice diferite a semnalului util şi semnalului perturbator apare o separare bună a acestora în domeniul transformat.

Etapa 2 poate fi implementată în mai multe moduri. Pot fi, de exemplu, utilizate filtre adaptive de tip LMS sau RLS, [85]. Se recomandă însă utilizarea filtrelor adaptive neliniare. Sunt deja cunoscute numeroase filtre neliniare care corespund acestei necesități. În continuare se prezintă relația intrare-ieşire specifică pentru câteva dintre acestea.

$$y = \begin{cases} x, & |x| \geq \lambda \\ & \lambda \in R^+ \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases} \tag{538}$$

$$\mathrm{y} = \left(\operatorname{sgn} x\right)\left(|x| - \lambda\right), \quad \lambda \in R^+ \tag{539}$$

$$y = \begin{cases} (\operatorname{sgn} x)\,(|x| - \lambda), & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases} \tag{540}$$

$$y = \begin{cases} 0, & |x| \leq \lambda \\ x - \dfrac{\lambda^2}{x}, & |x| > \lambda \end{cases} \tag{541}$$

$$y = \begin{cases} 0, & |x| \leq \lambda_1 \\ \operatorname{sgn} x \dfrac{\lambda_2(|x| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \lambda_1 < |x| \leq \lambda_2 \\ x, & |x| > \lambda_2 \end{cases} \tag{542}$$

Analiza statistică a filtrelor din relațiile (538) ÷ (540) este prezentată în [77]. Pentru celelalte filtre poate fi consultată lucrarea [65]. Majoritatea filtrelor prezentate mai sus pot fi transformate în filtre adaptive dacă valoarea parametrului din descrierea lor (de exemplu λ în relațiile (538), (540)) este făcută să depindă de unul dintre parametrii semnalului care trebuie prelucrat. Acest parametru poate fi de exemplu puterea zgomotului perturbator. Dacă, de exemplu, semnalul perturbator este de tipul zgomot alb de valoare medie nulă şi de dispersie σ şi dacă în etapa 1 se foloseşte o transformare "wavelet" discretă ortogonală, atunci puterea zgomotului perturbator în domeniul transformat (care va fi tot zgomot alb Gaussian), va fi σ^2. Dacă se foloseşte filtrul descris de relația (540) atunci, (conform regulii celor 3σ) alegând $\lambda > 3\sigma$, practic zgomotul este în întregime suprimat. Evident, raportul semnal pe zgomot al semnalului de prelucrat trebuie să fie relativ mare, în aşa fel încât înlăturarea eşantioanelor semnalului util din domeniul transformat, mai mici în modul decât 3σ, să nu producă distorsiuni prea mari ale acestui semnal. Prelucrarea descrisă mai sus este exemplificată în paragraful 8.4.3. Semnalul "Blocks" din figura 3.8.4.3 este perturbat aditiv cu zgomot alb, obținându-se semnalul din figura 4.8.4.3. Aplicându-se procedura descrisă mai sus se obține semnalul reconstruit din figura 6.8.4.3. Se remarcă faptul că fronturile semnalelor din figurile 3.8.4.3. şi 6.8.4.3 apar la aceleaşi momente de timp şi că zgomotul a fost aproape complet eliminat. De asemenea se remarcă faptul că distorsiunile introduse de metoda descrisă nu sunt prea mari. Aceste caracteristici ale metodei descrise fac din ea una din cele mai performante metode de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot.

Justificarea teoretică a afirmațiilor făcute poate fi găsită în următoarele rapoarte tehnice: [35], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [53].

În majoritatea acestor lucrări se recomandă utilizarea transformării "wavelet" discretă ortogonală, a filtrului descris de relația (540) iar parametrul λ se alege de valoare:

$$\lambda = \sqrt{N \log_2 N} \cdot \sigma$$

unde σ este dispersia zgomotului alb cu care se presupune că este perturbat semnalul util iar N reprezintă lungimea semnalului de prelucrat.

În [17] se demonstrează că de fapt aceeaşi metodă poate fi utilizată şi dacă semnalul perturbator este de altă natură decât zgomotul alb. Se prezintă câteva exemple de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot în prezența unor semnale perturbatoare de diferite tipuri. În figura 1.9.6.2 este prezentat semnalul util. În figurile 2.9.6.2, 3.9.6.2 şi 4.9.6.2 sunt prezentate semnale perturbatoare de tip zgomot uniform, de tip impulsuri şi de tip tren de impulsuri. În figurile 5.9.6.2, 6.9.6.2 şi 7.9.6.2 sunt prezentate în partea de sus semnalul din figura 1.9.6.2 perturbat aditiv cu zgomotele din figurile 2.9.6.2, 3.9.6.2 şi 4.9.6.2 iar în partea de jos semnalele corespunzătoare obținute în urma aplicării metodei de creştere a raportului semnal pe zgomot descrisă în acest paragraf.

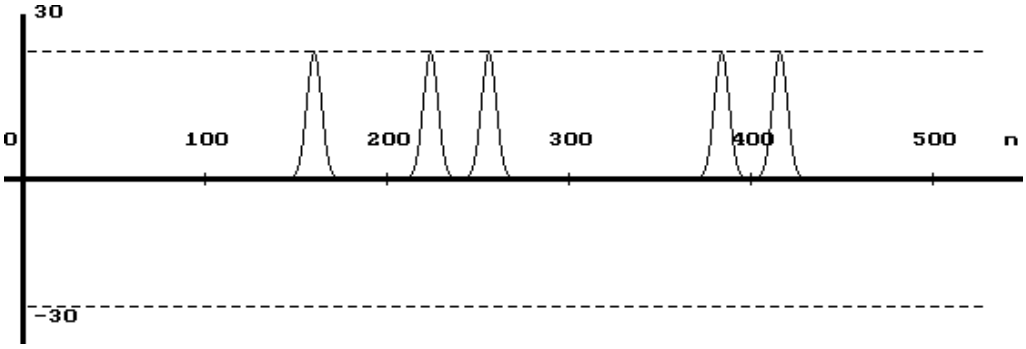


Figura 1.9.6.2. Semnalul util.

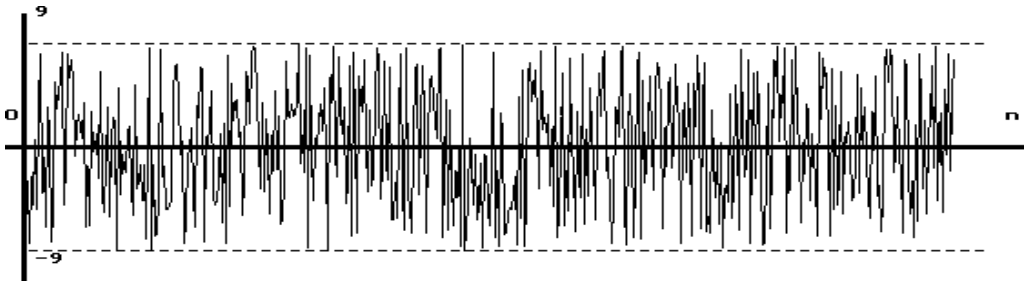


Figura 2.9.6.2. Semnal perturbator de tip zgomot uniform.

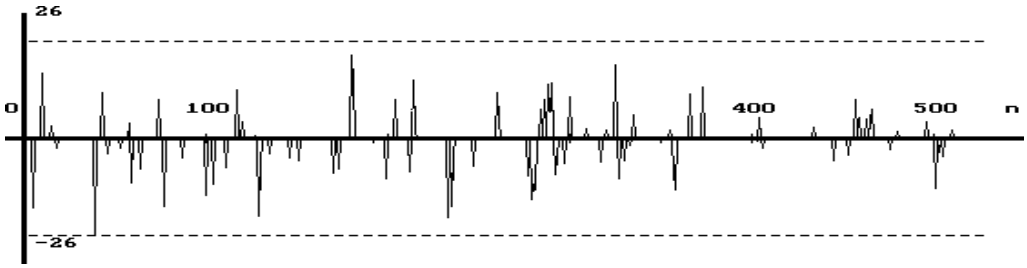


Figura 3.9.6.2. Semnal perturbator de tip impulsuri.

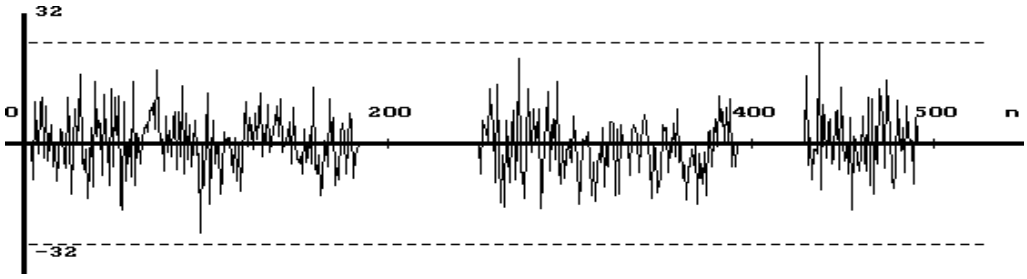


Figura 4.9.6.2. Semnal perturbator de tip tren de impulsuri.

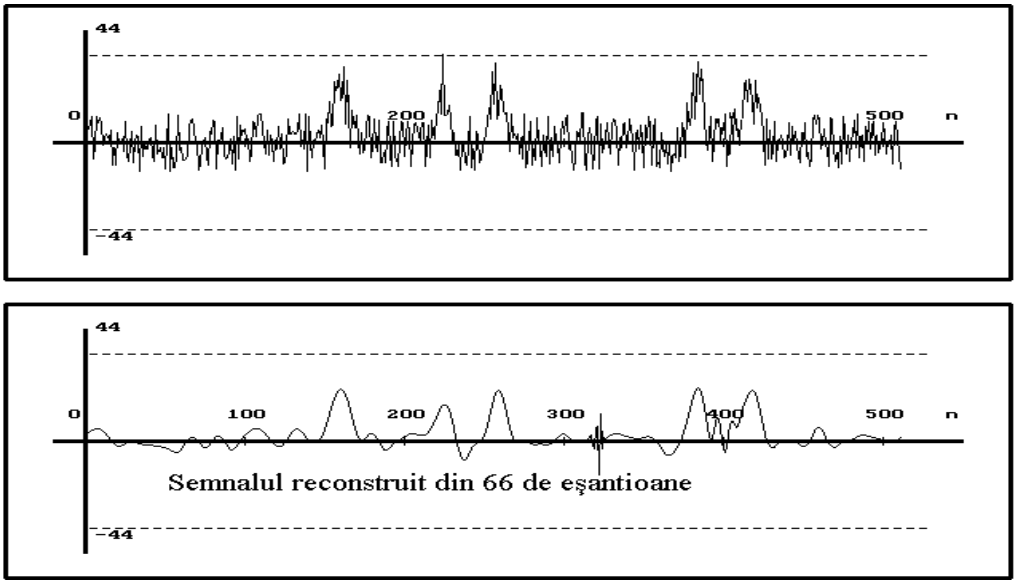


Figura 5.9.6.2. Imbunătățirea raportului semnal/zgomot în cazul perturbării cu zgomot uniform.

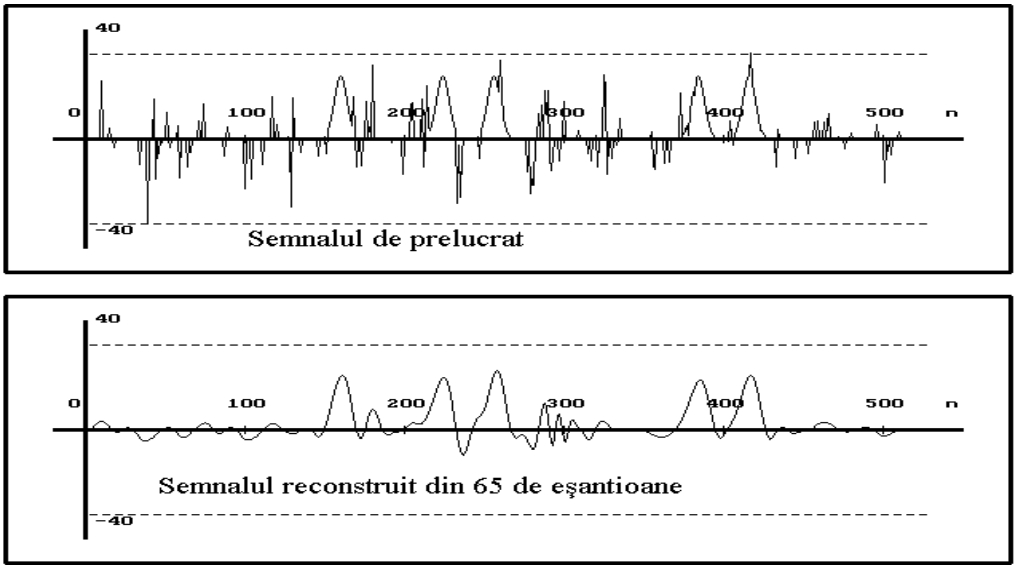


Figura 6.9.6.2. Imbunătățirea raportului semnal/zgomot în cazul perturbării cu zgomot în impulsuri.

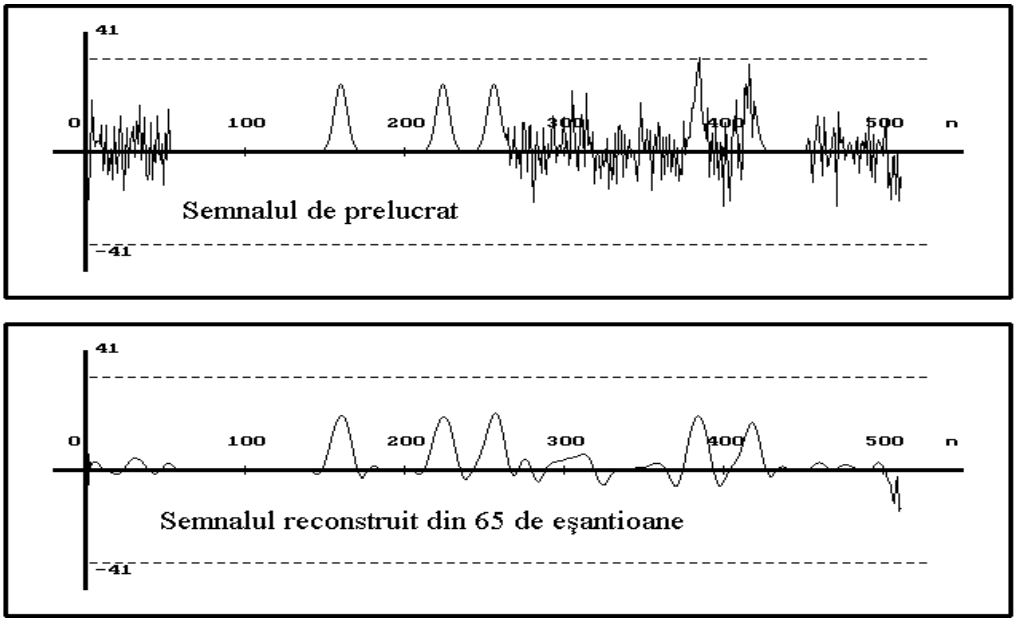


Figura 7.9.6.2. Imbunătățirea raportului semnal pe zgomot în cazul perturbării cu zgomot de tip tren de impulsuri.

Se remarcă calitatea bună a procedeului de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot. De asemenea se constată că metoda poate fi utilizată şi pentru realizarea unei compresii simultan cu procesul de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot.

În sistemele de telecomunicații se cunoaşte, de obicei, la recepție, puterea semnalului emis dar nu se cunoaşte exact puterea zgomotului care se suprapune, în canal, peste semnal. De aceea în cazul acestor sisteme este mai util ca parametrul λ să fie ales în funcție de P şi nu de σ. În [72] se prezintă un algoritm adaptiv de alegere a pragului λ pornind de la cunoaşterea valorii lui P. În continuare se dă un exemplu de utilizare a acestui algoritm.

În figura 8.9.6.2 este prezentat semnalul util, în figura 9.9.6.2 este prezentat semnalul perturbat aditiv de zgomot alb. Valoarea raportului semnal/zgomot este de 1,8.

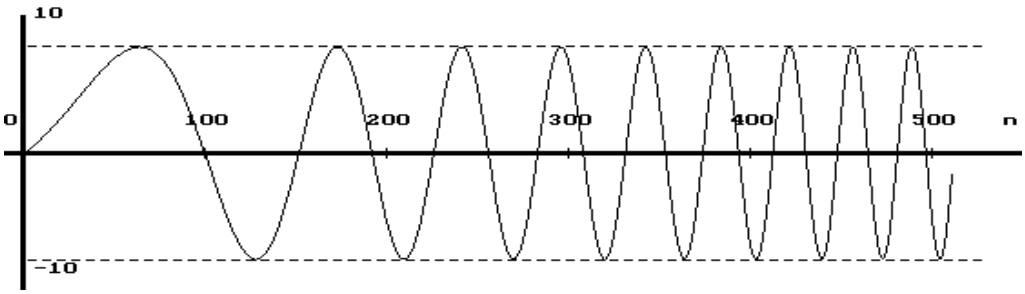


Figura 8.9.6.2. Semnalul util.

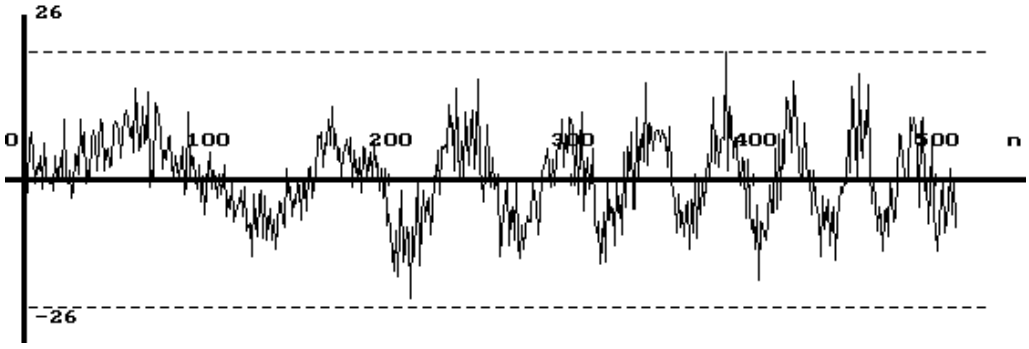


Figura 9.9.6.2. Semnalul perturbat aditiv de zgomot alb.

În figura 10.9.6.2 este prezentat rezultatul aplicării algoritmului amintit mai sus. Se constată calitățile metodei de creştere a raportului semnal/zgomot. Valoarea raportului semnal/zgomot la ieşire este de 10,5. S-a realizat o îmbunătățire a raportului semnal/zgomot de 5,83.

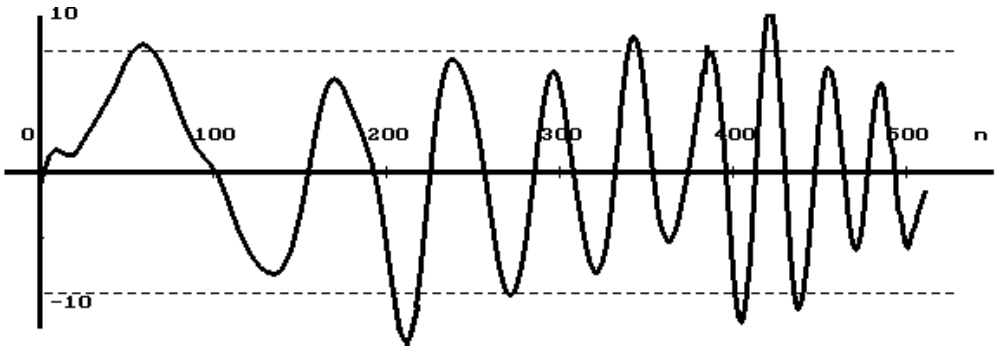


Figura 10.9.6.2. Semnalul reconstruit în urma aplicării algoritmului descris.

O deficienţă a transformării "wavelet" discretă ortogonală, care se remarcă dacă această transformare este folosită în cadrul metodei de îmbunătățire a raportului semnal / zgomot prezentată în acest paragraf, este neinvarianţa sa la translații. În scopul eliminării acestei deficienţe au fost concepute noi transformări "wavelet" discrete invariante la translații. Acestea sunt prezentate în: [35], [63] şi [81]. Alte metode de îmbunătățire a raportului semnal/zgomot bazate pe utilizarea funcțiilor "wavelet" sunt prezentate în [26], [98] şi [102].

9.6.3 APLICAȚIILE REPREZENTĂRILOR TIMP-FRECVENȚĂ LA PRELUCRAREA IMAGINILOR

Unul dintre domeniile cele mai interesante ale telecomunicațiilor este legat de prelucrarea şi transmiterea imaginilor. După cum s-a văzut în paragraful 8.2.3 există algoritmi rapizi pentru calculul transformării "wavelet" discretă a unei imagini. În paragraful 8.4.3 s-a prezentat un exemplu de aplicare a acestui algoritm.

Tehnica de compresie descrisă în paragraful 9.5.3 poate fi utilizată şi în cazul imaginilor. Rezultate ale aplicării acestei tehnici de compresie la imagini sunt raportate în [61] şi în [30].

De obicei în urma aplicării transformării "wavelet" discretă directă, compresia propriuzisă este realizată prin cuantizare. În sursele bibliografice citate mai sus se utilizează cuantizarea scalară, uniformă respectiv neuniformă.

Michel Barlaud a fost primul care a utilizat cuantizarea vectorială în domeniul transformării "wavelet" discretă. În acest mod el a obținut factori de compresie superiori valorii 100, [96]. Tehnici mai moderne de compresie bazate pe utilizarea funcțiilor "wavelet" sunt prezentate în [118]. O problemă dificilă este aprecierea calității compresiei realizate. Cu alte cuvinte este greu de ştiut care este calitatea aproximării unei imagini obținută prin decompresia variantei compresate (cu un anumit factor de compresie) a imaginii considerate. Această problemă este studiată în [92].

În continuare se prezintă un exemplu de compresie de imagini. În figura 1.9.6.3 este prezentată imaginea originală. În figura 2.9.6.3 este prezentată imaginea obținută după aplicarea procedurilor de compresie şi de reconstrucție. Compresia a fost realizată prin:

- aplicarea transformării "wavelet" discretă directă, folosind funcția "wavelets mother" Daubechies 4,
- cuatizarea scalară exponențială.

S-a obținut un factor de compresie de 10. Eroarea medie pătratică de aproximare a imaginii din figura 1.9.6.9 prin imaginea din figura 2.9.6.9 este de 0,0239, [55].

Figura 1.9.6.3. Imaginea originală.

Figura 2.9.6.3. Imaginea comprimată.

Există şi alte domenii ale prelucrării imaginilor în care se utilizează funcțiile "wavelet". De exemplu în cazul imaginilor de tomografie, datorită sistemului de achiziție folosit medicul nu are acces la imaginea biologică ci doar la transformata Radon a acesteia. Se pune deci problema calculului transformatei Radon inversă a imaginii achiziționate. În acest scop poate fi utilizată teoria funcțiilor "wavelet" aşa cum s-a arătat în [6].

9.6.4 ALTE APLICAȚII ÎN TELECOMUNICAȚII

Una dintre cele mai importante aplicații în telecomunicații ale teoriei funcțiilor "wavelet" este la transmisia datelor pe linie telefonică, pe canal radio sau pe rețele ATM sau INTERNET. Majoritatea schemelor de transmisie se bazează pe tehnici separate de codare a sursei şi de codare a canalului. Această tradiție de a separa sarcinile de codare a sursei de sarcinile de codare a datelor care se transmit prin canal izvorăşte din celebrul "principiu de separare" al lui Shannon. Acest principiu afirmă că separarea sarcinilor de codare a sursei de codarea datelor care se transmit prin canal este un procedeu optimal. De exemplu, într-o transmisie punct la punct folosind un canal invariant în timp, cum ar fi de exemplu o linie telefonică, se poate proiecta cea mai bună metodă de codare a canalului pentru a exploata capacitatea acestuia (adică să se obțină o rată de R biți/sec, astfel încât $R \leq C$, unde C este capacitatea canalului măsurată în biți / sec). În acest caz sarcina codorului sursei este de a încerca să realizeze o compresie în aşa fel încât să se poată obține rata R. Există câteva motive pentru a nu respecta "orbeşte" principiul separării. În primul rând principiul lui Shannon este teoretic. Acesta presupune utilizarea unor coduri de lungime şi complexitate infinită. Există şi alte motive, chiar şi de natură teoretică pentru a avea în vedere tehnici de codare mixte, sursă-canal. Dacă canalul este variant în timp sau dacă transmisia are utilizatori multipli atunci şi teoretic este mai bine să se facă o proiectare mixtă a codoarelor sursei şi canalului. O astfel de codare mixtă sursă-canal poate fi realizată şi folosind ideea de multirezoluție. Transmisia multirezoluție se bazează pe faptul că un sistem de transmisie poate lucra cu diferite viteze de transmisie, în funcție de condițiile din canal. În cazul unor canale puternic perturbate se poate pune problema ca anumiți biți ai mesajului de transmis să fie codați în aşa fel încât să li se asigure o imunitate la zgomot superioară față de imunitatea care li se asigură altor biți. Un astfel de sistem de transmisie poate fi realizat folosind diferite tehnici în funcție de tipul canalului. De exemplu pot fi utilizate coduri de lungime diferită pentru diferite categorii de biți din mesajul de transmis, protejând mai mult de perturbații biții mai importanți. O astfel de schemă de transmisie poate fi combinată cu un codor multirezoluție al sursei. Un astfel de codor segmentează informația sursei într-o parte "importantă" prin reconstrucția căreia se obține o primă aproximare a semnalului de transmis şi o parte "de detaliu". Informația "importantă" poate fi transmisă în urma codării cu ajutorul unor cuvinte de cod mai lungi şi va avea o probabilitate mai mare de a fi recepționată fără erori în timp ce informația "de detaliu" este transmisă în urma codării cu ajutorul unor cuvinte de cod mai scurte şi va fi recepționată fără erori doar dacă la momentul transmisiei canalul va fi slab perturbat. În acelaşi fel schema poate fi generalizată pentru mai multe nivele de importanță ale biților din mesajul de transmis. Această adaptare intuitivă a aproximațiilor succesive ale semnalului sursă la diferite viteze de transmisie, în funcție de calitatea canalului este numită codare mixtă canal-sursă multirezoluție.

BIBLIOGRAFIE

[1] P. Abry, P. Flandrin. On the Initialization of the Discrete Wavelet Transform Algorithms. *IEEE Signal Processing Letters,* vol.1, No.2, pp32-34, February 1994.

[2] *** ADA 3100/ADA 3100A, User's Manual, *Real Time Devices Inc*., USA, 1991.

[3] A. N. Akansu, R. A. Hadad. Multiresolution Signal Decomposition. *Academic Press*, New York, 1992.

[4] T. Asztalos, A. Isar. An Adaptive Data Compression Method Based on the Fast Wavelet Transform. *Proceedings of the International Symposium Etc'94*, Timişoara, vol III, pp 37-42, Sept. 1994.

[5] T. Asztalos. An Algorithm for the DWT on Block Computation. *Proceedings of the International Symposium Etc'96*, Timişoara, vol II, pp.128-133, Sept. 1996.

[6] T. Asztalos. Tomography Imaging. Radon Transform Inversion Procedures. *Raport de stagiu*, Universitatea Paris-Sud, Iulie 1997.

[7] P. Auscher. Wavelets with Boundary Conditions on the Interval. În *Wavelets-A Tutorial in Theory and Applications*. C. K. Chui (editor), pp.217-236, 1992.

[8] R. G. Baraniuk, L. Fridtjof Wisur-Olssen. Optimal Phase Kernels for Time-Frequency Analysis. Propusa spre publicare în *IEEE Transactions on Signal Processing*, Ianuarie 1996.

[9] S. Basu, C. H. Chiang, H. M. Choi. Wavelets and Perfect Reconstruction Subband Coding with Causal Stable IIR Filters. *IEEE Trans. On Circuits and Systems II*, vol. 42, No.1, January 1995.

[10] M. Belanger. Traitement numérique du signal. *Masson* 1990.

[11] J. Benedetto, A. Teolis. A Wavelet Auditory Model and Data Compression. În *Applied and Computational Harmonic Analysis*. No.1, pp.3-28, February 1993.

[12] B. Boashash, P. O. Shea, M. J. Arnold. Algorithms for Instantaneous Frequency Estimation: A Comparative Study. *Proceedings of SPIE California*, July 1990.

[13] B. Boashash. Time-Frequency Signal Analysis. În *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*. S. Haykin (editor), pp.418-519, *Prentice Hall* 1991.

[14] B. Boashash, A. Reilly. Algorithms for Time-Frequency Signal Analysis. În *Time Frequency Signal Analysis*. B. Boashash (editor), pp.141-163, *John Wiley* 1992.

[15] B. Boashash, P. O. Shea. Polynomial Wigner-Ville Distributions and Their Relationship to Time-Varying Higher Order Spectra. *IEEE Transactions on Signal Processing*, January 1994.

[16] P. J. Boles, B. Boashash. Applications of the Cross-Wigner-Ville Distribution to Seismic Data Processing. În *Time-Frequency Signal Analysis*. B. Boashash (editor), pp.141-163, *John Wiley* 1992.

[17] M. Borda, D. Isar. Whitening with Wavelets. *Proceedings of "ECCTD. 97" Conference*, Budapest, August 1997.

[18] C. M. Bucur. Metode numerice. *Ed. Facla* Timisoara 1973.

[19] J. Bukheit, D. Donoho. Improved Linear Discrimination Using Time-Frequency Dictionaries. *Technical Report, Stanford University*, July 1995.

[20] J. Bukheit, S. Chen, D. Donoho, I. M. Johnstone, J. Scargle. About WaveLab. *Preprint, Stanford University*, November 1995.

[21] J. Bukheit, D. Donoho. WaveLab Architecture. *Preprint, Stanford University*, November 1995.

[22] J. Bukheit, S. Chen, D. Donoho, I. M. Johnstone, J. S. Cargle. WaveLab Reference Manual. *Preprint, Stanford University*, December 1995.

[23] J. B. Bukheit, D. Donoho. Time-Frequency Tillings which Best Expose the Non-Gaussian Behaviour of a Stochastic Process. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS'96"*, pp.1-4, Paris, July 1996.

[24] F. Chaplais. Algebras and Nonlinear Multiresolution Analysis that are Consistent with the Strang and Fix Conditions. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS'96"*, Paris, July 1996.

[25] S. S. Chen, D. L. Donoho, M. A. Saunders. Atomic Decomposition by basis Pursuit. *Technical Report 479, Stanford University*, May 1995.

[26] B. S. Chen, C. W. Lin. Multiscale Wiener Filter Bank Approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, No. 11, pp.2972-2982, November 1994.

[27] H. I. Choi, W. J. Williams. Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponentials Kernels. *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 37, no. 6, pp.862-871, 1989.

[28] C. K. Chui (editor). An Introduction to Wavelets. *Academic Press*, New York 1992.

[29] C. K. Chui (editor). Wavelets. A Tutorial in Theory and Applications. *Academic Press*, New York 1992.

[30] A. Cohen. Ondelettes et traitement numérique du signal. *Masson*, 1992.

[31] A. Cohen, I. Daubechies, J. C. Feauveau. Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Communcations on Pure and Applied Mathematics*, vol. XLV, pp.485-560, 1992.

[32] A. Cohen, I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets III. Better Frequency Resolution. *SIAM Journal Math. Anal*., vol. 24, No.2, pp. 520-527, March 1993.

[33] A. Cohen, J. P. d'Ales. Nonlinear Approximation of Stochastic Processes. În Wavelets and Statistics. A. Antoniadis si G. Oppenheim (editori), *Springer Verlag*, pp.129-132, 1995.

[34] R. R. Coifman, N. Saito. The Local Karhunen-Loeve Bases. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS' 96"*, pp.129-132, Paris, July 1996.

[35] R. R. Coifman, D. L. Donoho. Translation Invariant De-Noising. În Wavelets and Statistics. A. Antoniadis si G. Oppenheim (editori), pp.125-150, *Springer Verlag* 1995.

[36] P. L. Combettes, J. C. Pesquet. Convex Multiresolution Analysis. *Proceedings of IEEE Conference "TFTS'96"*, Paris, July 1996.

[37] F. de Coulon. Théorie et traitement des signaux. *Presses polytechniques romandes*. Lausanne 1984.

[38] G. Courbebaisse. Caractérisation d'un systeme d'injection par analyse temps-fréquence. *Traitement du signal*, vol.12, No.5, pp.509-518, 1995.

[39] R. Cristescu. Analiza functionala. *Editura Didactica si Pedagogică*, Bucuresti 1965.

[40] I. Daubechies. The Wavelet Transform: A Method for Time-Frequency Localization. În Advances in Spectrum Analysis and Array Processing. S. Haykin (editor), *Prentice-Hall*, New-Jersey 1991.

[41] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Comm. Pure Appl. Math*., No. 41, pp.909-996, 1988.

[42] I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. *SIAM*, Philadelphia 1992.

[43] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets II. Variations on a Theme. *SIAM J. Math. Anal*., vol. 24, No. 2, pp. 499-519, March 1993.

[44] B. Deng, B. Jawerth, G. Peters, W. Swelden. Wavelet Probing for Compression Based Segmentation. *Proceedings of SPIE*, San Diego, July 1993.

[45] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage. *Technical Report 400, Stanford University*, July 1992.

[46] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Minimax Estimation via Wavelet Shrinkage. *Technical Report 402, Stanford University*, July 1992.

[47] D. L. Donoho. De-Noising via Soft Thresholding. *Technical Report 409, Stanford University*, November 1992.

[48] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Unconditional Bases are Optimal Bases for Data Compression and for Statistical Estimation. *Technical Report 410, Stanford University*, November 1992.

[49] D. L. Donoho. Wavelet Shrinkage and W.V.D.-A Ten Minute Tour. *Technical Report 416, Stanford University*, January 1993.

[50] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Adapting the Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage. *Technical Report 425, Stanford University*, June 1993.
[51] D. L. Donoho. Nonlinear Wavelet Methods for Recovering Signals, Images and Densities from Indirect and Noisy Data. *Technical Report 426, Stanford University*, July 1993.
[52] D. L. Donoho. On Minimum Entropy Segmentation. *Technical Report 450, Stanford University*, April, 1994.
[53] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Ideal De-Noising in an Orthonormal Basis Chosen from a Library of Bases. *Technical Report 461, Stanford University*, September 1994.
[54] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer. A Class of Nonharmonic Fourier Series. *Trans. Amer. Math. Soc*., No. 72, pp.341-366, 1952.
[55] G. Dumitras. Aplicatii ale transformatei "wavelet". Realizarea compresiei imaginilor utilizând transformarea "wavelet". *lucrare de dizertatie, Departamentul de Comunicatii, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii*, Timisoara, Iulie 1996.
[56] P. Duvaut. Traitement du signal-concepts et applications. *Hermes*, Paris 1991.
[57] A. W. M. van den Enden, N. A. M. Verhoekx. Traitement numérique du signal. *Masson*, Paris 1992.
[58] J. C. Feauveau. Nonorthogonal Multiresolution Analysis using Wavelets. În Wavelets-A Tutorial in Theory and Applications. C. K. Chui (editor), *Academic Press*, pp.153-178, 1992.
[59] P. Flandrin. Representation temps-fréquence. *Hermes*, 1993.
[60] D. Forester. Time-Frequency Analysis in Machine Fault Detection. În Time-Frequency Signal Analysis. B. Boashash (editor), pp. 406-423, *J.Willey*, 1992.
[61] J. Froment. Traitement d'images et applications de la transformée en ondelettes. *Teza de doctorat, Universitatea Paris IX*, 1990.
[62] J. Froment, S. Parrino. MegaWave 2 User's Modules Library. vol. I, vol. III, *Preprint CEREMADE, Univ. Paris Dauphine*, Novemeber 1994.
[63] J. Froment. Introduction a la théorie des ondelettes. *curs de vara*, Timisoara, Iunie 1995.
[64] L. Gagnon, J. M. Lina, B. Goulard. Application of Complex Daubechies' Wavelets to Numerical Simulation of a Nonlinear Signal Propagation Model. *Preprint of the Labo. de Phys. Nucl. Univ. de Montreal*, 1994.
[65] H. Y. Gao. Wavelets Shrinkage Estimate for Heteroscedatic Regression Models. *Preprint MathSoft*, 1997.
[66] P. Gavruta, A. Isar. Time-Frequency Representations. A Unitary Presentation. *Proceedings of International Symposium Etc'94*, vol. 3, pp. 25-30, Timisoara Septembrie 1994.
[67] F. Hlawatsch, W. Kozek. Time-Frequency Analysis of Linear Signal Spaces. *IEEE Conference ICASSP-91*, pp.2045-2048, Toronto, May 1991.

[68] F. Hlawatsch, G. F. Boudreaux-Bartels. Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Reprsentations. *IEEE S.P.Magazine*, pp.21-65, April 1992.
[69] ***. Catalog HP
[70] A. Isar, D. Isar. A Generalization of the W.K.S. Theorem Using Orthogonal Decomposition of L^2(R). Applications in Signal Processing Theory. *Revista ATM*, anul III, pp.91-97, Bucuresti, 1993.
[71] A. Isar. Nouvelles modalités de décomposition multirésolution. *Quatorzieme Colloque GRETSI, Juan-Les Pins*, pp.363-366, 13-16 Septembre 1993.
[72] A. Isar. L'estimation de la transformée en ondelettes avec bancs de filtres a temps continu. *Colloque TOM'94*, pp. 34.1-34.4, Lyon, 9-11 Mars 1994.
[73] D. Isar. De-noising adaptatif. *Seizieme Colloque GRETSI*, pp.1249-1252, Grenoble, 15-19 Septembre 1997.
[74] D. Isar, A. Isar. A New Class of Identity Systems. *International Workshop on Sampling Theory and Applications, Universidad de Aveiro*, June 16-19 1997.
[75] A. Isar. Tehnici de masurare adaptiva cu aplicatii în aparatura de masurare numerica. *Teza de doctorat, Universitatea "Politehnica" Timisoara* 1993.
[76] B. Jawerth, W. Swelden. An Overwiev of Wavelet Based Multiresolution Analysis. *Preprint, Katolike Universiteit Leuven*, Belgium 1995.
[77] A. J. Jerry. The Shanon Sampling Theorem-its Extensions and Applications. A Tutorial. *Proc. IEEE*, 65, 11, pp.1565-1596, November 1987.
[78] H. Krim, D. H. Brooks. Feature-Based Segmentation of ECG Signals. *Proceedings of IEEE Conference, TFTS'96*, pp. 97-100, Paris, July 1996.
[79] M. Kunt, R. Boite. Traitement de la parole. *Presses Polytechniques Romandes*, 1987.
[80] M. Kunt. Traitement numérique des signaux. *Traité d'Electricité de l'EPFL*, *vol. XX, 3-eme édition*, *Presses Polytechniques Romandes*, 1984.
[81] M. Lang, H. Guo, J. E. Odegard, C. S. Burrus, R. O. Wells. Nonlinear Processing of a Shift Invariant DWT for Noise Reduction. *Proceedings of SPIE Symposium on OE/Aerospace Sensing and Dual Photonics*, Orlando, SUA. April 1995.
[82] P. G. Lemarié-Rieusset. Analyses multi-echelles et ondelettes a support compact. În Les ondelettes en 1989. P. G. Lemarié (editor), *Springer Verlag*, 1990.
[83] P. G. Lemarié-Rieusset, G. Malgouyres. Support des fonctions de base dans une analyse multirésolution. *C. R. Acad. Sci. Paris, tome 313, serie 5*, pp.377-380, 1993.
[84] J. S. Lim, A. V. Oppenheim (editori). Advanced Topics in Signal Processing. *Prentice Hall*, New Jersey 1988.
[85] O. Macchi. Adaptatif et non stationnaire. *Traitement du signal*, vol. 6, No.5 pp.325-387, 1989.

[86] G. Malgouyres. Analyse multirésolution sur l'intervalle. Algorithme rapide. *Preprint, Université Paris-Sud*, 1991.
[87] G. Malgouyres. Ondelettes a support compact et analyse multirésolution sur l'intervalle. *Preprint, Université Paris-Sud*, 1992.
[88] G. Malgouyres. Introduction a la théorie des ondelettes. *Curs de vara,* Timisoara 1994.
[89] S. Mallat. Multifrequency Channel Decomposition. *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 37, No.12, pp. 2091-2110, Octobre 1989.
[90] S. Mallat. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: the Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Inteligence*, vol. II, No.7, pp.674-693, July 1989.
[91] S. Mallat, Z. Zhang. Matching Pursuits with Time-Frequency Dictionary. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, No.12, pp.3397-3415, December 1993.
[92] S. Mallat, F. Falzon. Understanding Image Transform Codes. *Proceedings of the SPIE Aerospace Conference*, Orlando, April 1997.
[93] H. S. Malvar. Lapped Transforms for Efficient Transform/Subband Coding. *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 38, pp.969-978, June 1990.
[94] A. Mateescu, M. Raducanu, L. Stanciu. Best Basis with Wavelet Packets for a Signal. *Proceedings of International Symposium Etc'96* Timisoara, vol. II, pp.106-111, September 1996.
[95] Y. Meyer. Ondelettes, filtres miroirs en quadrature et traitement numérique de l'image. În Les ondelettes en 1989. P. G. Lemarié (editor), *Springer-Verlag*, 1990.
[96] Y. Meyer. Ondelettes et algorithmes concurents. *Herman*, Paris 1993.
[97] Y. Meyer. Wavelets and Operators. În *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. I. Daubechies (editor), vol. 47, *AMS*,1993.
[98] P. Moulin. Wavelet Thresholding Techniques for Power Spectrum Estimation. *IEEE Trans. on S.P*., vol. 42, No.11, pp. 3126-3136, November 1994.
[99] I. Nafornita, A. Câmpeanu, A. Isar. Semnale circuite si sisteme. vol. I, *Editura UPT*, 1995.
[100] M. Nafornita, A. Isar, D. Isar. A Generalization of the Sampling Theorem. *Rev. Roum. Sci. Tehn.-Electrotehn. Et Energ*., 37, pp. 177-183, Bucarest 1992.
[101] S. B. Narayanan, J. Mc. Loughlin, Les Atlas, J. Darapo. An Operator Theory Approach to Discrete Time-Frequency Distribution. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS'96"*, pp. 521-524, Paris 1996.
[102] G. P. Nasson. Wavelet Regression by Cross-Validation. *Preprint University of Bristol*, March 1994.
[103] *** Catalog National Instruments

[104] V. E. Neagoe. Using Legendre Polynomials to Introduce a New Orthogonal Transform for Significant Feature Selection. *Proceedings of Pattern Recognition and Image Processing Conference*, pp.177-182, Las Vegas, June 1982.

[105] J. C. O'Neill, W. J. Williams. New Properties for Discrete Bilinear Time-Frequency Distributions. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS'96"*, pp. 505-508, Paris 1996.

[106] A. Oppenheim, R. W. Schaefer. Digital Signal Processing. *Prentice Hall*, 1986.

[107] R. W. Page, N. W. Nelson. Adaptive Sample Rate: A First Generation Automatic Time Base. *Hewlett Packard Journal*, February 1988.

[108] A. Papandreu, F. Hlavatsch, G. F. Boudreaux-Bartels. The HyperbolicClass of Quadratic Time-Frequency Representations. Part I: Constant-Q Warping, the Hyperbolic Paradigm, Properties and Members. *IEEE Trans. on SP*, vol. 41, No.12, December 1993.

[109] M. Pasquier, P. Gonçalves, R. Baraniuk. Hybrid Linear/Bilinear Time-Scale Analysis. *Proceedings of IEEE Conference "TFTS'96"*, pp.513-516, Paris, July 1996.

[110] D. Pastor, R. Gay. Décomposition d'un processus stationnaire du seconde ordre. Propriétés statistiques d'ordre 2 des coefficients d'ondelettes et localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes. *Traitement du signal*, vol. 12, no. 5, pp. 393-420, 1995.

[111] A. P. Pentland. Interpolation using Wavelet Bases. *IEEE Trans. on PAMI*, vol.16, no.4, April 1994.

[112 S. M. Phoong, C. W. Kim, P. P. Vaidyanathan, R. Anseri. A New Class of Two-Channel Biorthogonal Filter Banks and Wavelet Bases. *IEEE Transactions on SP*, vol. 43, no.3, pp. 649-665, March 1995.

[113] J. W. Pitton, K. Wang, B. H. Juang. Time-Frequency Analysis and Auditory Modeling for Automatic Recognition of Speech. *Proceedings of the IEEE*, vol. 84, no.9, pp.1199-1214, Sept. 1996.

[114] E. Pop, I. Nafornita, V. Tiponut, L.Toma, A. Mihaescu. Metode în prelucrarea numerica a semnalelor. vol I si vol II, *Ed. Facla*, Timisoara 1986 si 1989.

[115] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. Numerical Recipes in C. *Cambridge University Press*, 1995.

[116] F. Preteux. Description et intérprétation des images par la morphologie mathématique. Application a l'image médicale. *These de doctorat d'Etat, Université Paris VI*, 1987.

[117] S. Qian, D. Chen. Joint Time-Frequency Analysis. *Prentice Hall*, 1996.

[118] K. Ramchandran, M. Vetterli, C. Healey. Wavelets, Subband Coding and Best Bases. *Proceedings of the IEEE* vol. 84, No. 4, pp.541-558, April 1996.

[119] J. Raz, L. Dickerson, B. Turetsky. A Wavelet Packet Model of Evoked Potentials. *Preprint of School of Public Health, Ann Arbor*, Michigan, 1997.

[120] O. Rioul, P. Duhamel. Fast Algorithms for Discrete and ContinuousWavelet Transforms. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 28, No. 2, pp.569-586, March 1992.

[121] O. Rioul. A Discrete Time Multiresolution Theory. *IEEE Trans. on SP*, vol. 41, no. 8, pp. 2591-2606, August 1993.

[122] O. Rioul. Ondelettes régulieres: Applications a la compression d'images fixes. *these de doctorat, ENST Paris*, Mars 1993.

[123] G. Rulea. Prelucrarea optima a semnalului radio. *Ed. Tehnica*, Bucuresti 1980.

[124] R. B. Randall. Applications of B&K Equipment to Frequency Analysis. *B&K*, 1987.

[125] A. De Sabata, A. Isar. Semnale Circuite si Sisteme. *Indrumator de laborator, Litografia UPT*, 1993.

[126] A. De Sabata, C. Iung, J. F. Aubry. A Variabile Scale DWT. *Proceedings of the International Symposium Etc'94*, vol. III, pp.43-48, Timisoara Sept. 1994.

[127] R. J. Sclabassi, M. Sun, D. N. Krieger, P. J. Jasukitias, M.S.Scher. Time-Frequency Domain Problems in the Neurosciencies. În Time-Frequency Signal Analysis. B. Boashash (editor), pp.498-519, *John Wiley*, 1992.

[128] M.J.Shensa. The Discrete Wavelet Transform: Weding the "A Trous" and Mallat Algorithms. *IEEE Trans. on S.P.* vol 40, No. 10, pp.2464-2482, October 1992.

[129] M. J. T. Smith, T. P. Barnwell III. Exact Reconstruction Techniques for Tree-Structured Subband Coders. *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 34, pp.434-441, 1986.

[130] A. Spataru. Fondements de la théorie de la transmission de l'information. *Presses Polytechniques Romandes*, Lausanne, 1987.

[131] P. Srinivasan, L. M. Jamieson. Techniques for Variable Rate Speech Coding using Wavelet Representations. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS'96*, pp.109-112, Paris, July 1996.

[132] W. Sweldens. Compactly Supported Wavelets which are Biorthogonal with Respect to a Weighted Inner Product. *Preprint University of South Carolina*, 1994.

[133] W. Sweldens. The Lifting Scheme: A Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets. *Preprint University of South Carolina*, 1994.

[134] C. Taswell. Speech Compression with Cosine and Wavelet Packet Near-Best Bases. *Preprint, Stanford University*, 1995.

[135] C. Taswell. Image Compression by Parametrized-Model Coding of Wavelet Packet Near-Best Bases. *Preprint, Stanford University*, 1996.

[136] C. Taswell. Statisficing Search Algorithms for Selecting Near-Best Bases in Adaptive Tree-Structured Wavelet Transforms. În curs de publicare în *IEEE Transactions on Signal Processing.*

[137] P. Tchamitchian. Wavelets and Differential Operators. În Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. I. Daubechies (editor), vol. 47, *A.M.S.*, 1993.

[138] ***. Technology 1991. *IEEE Spectrum*, January 1991.

[139] N. N. Temme. Asymtotics and Numerics of Zeros of Polynomials that are Related to Daubechies Wavelets. *Technical report AM-R9613, National Research Institute for Mathematics and Computer Science*, Amsterdam, 1996.

[140] ***. Timeview PM 9629. Application Note. *Flucke and Philips* Sweden, 1992.

[141] L. Tolhuizen, N. Hollmann, T.A.C.M. Kalker. On the Realizability of Biorthogonal, m-Dimensional Two-Band Filter Banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, No.3, March 1995.

[142] P. P. Vaidyanathan. Multirate Systems and Signal Processing. *Prentice Hall, Englewood Cliffs*, 1993.

[143] M. Wechsler. Caracterization of Time Varying Frequency Behaviour using Continuous Measurement Technology. *Hewlett Packard Journal*, February 1989.

[144] E. Wesfreid, M. V. Wickerhauser. Etudes des signaux vocaux par ondelettes de Malvar. *Quatorzieme Colloque GRETSI, Juan-Les-Pins*, Septembre 1993.

[145] M. Wickerhauser. Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software. *A. K. Peters Wesley* ,1994.

[146] X. G. Xia, C. C. J. Kuo, Z. Zhang. Wavelet Coefficient Computation with Optimal Prefiltering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no.8, pp. 2191-2197, August 1994.

[147] M. H. Yaou, W. T. Chang. M-Ary Wavelet transform and Formulation for Perfect Reconstruction in M-Band Filter Bank. *IEEE Transactions on Signal Processing*, pp.3508-3512, vol. 42, No.12, December 1994.

[148] X.-P. Zhang, M. D. Dessai, Y.-N. Peng. Orthonormal Complex Filter Banks and Wavelets: Some Properties and Design. *Preprint University of Texas at San-Antonio*, 1996.

ALCATEL